

***ELEMENTS FINIS D'ORDRE ELEVE AVEC  
CONDENSATION DE MASSE POUR  
L'EQUATION DES ONDES EN DIMENSION 1***

Gary Cohen, Patrick Joly, Nathalie Tordjman

**N° 2323**

Aout 1994

PROGRAMME 6

Calcul scientifique,

modélisation

et logiciel numérique

 ***apport  
de recherche***

**1994**



# ELEMENTS FINIS D'ORDRE ELEVE AVEC CONDENSATION DE MASSE POUR L'EQUATION DES ONDES EN DIMENSION 1

Gary Cohen, Patrick Joly, Nathalie Tordjman \*

Programme 6 — Calcul scientifique, modélisation et logiciel numérique  
Projet Ident

Rapport de recherche n ° 2323 — Aout 1994 — 89 pages

**Résumé :** Ce rapport est consacré à la construction et à l'analyse d'une méthode d'ordre élevé en espace et en temps pour résoudre l'équation des ondes en dimension 1. Cette méthode est fondée sur des éléments finis de Lagrange de type  $P_1$ ,  $P_2$  et  $P_3$  avec condensation de masse, afin d'éviter une inversion de la matrice de masse à chaque pas de temps. Alors que pour  $P_1$  et  $P_2$  les éléments restent inchangés, la condensation de masse implique pour  $P_3$  un déplacement des points intérieurs, afin qu'ils coïncident avec les points de quadrature de Gauss-Lobatto. Une analyse par Fourier de la méthode sur un maillage régulier met en évidence un résultat de superconvergence. Le gain de précision est illustré par des expériences numériques.

**Mots-clé :** Equation des ondes - Eléments finis d'ordre élevé - Condensation de masse - Analyse par Fourier - Superconvergence.

*(Abstract: pto)*

# HIGHER ORDER FINITE ELEMENTS WITH MASS LUMPING FOR THE 1D WAVE EQUATION

**Abstract:** This report is devoted to the construction and analysis of a method, higher order in space and time, for solving the 1D wave equation. This method is based on  $P_1$ ,  $P_2$  and  $P_3$  Lagrange finite elements with mass-lumping which avoids the inversion of a mass matrix at each time-step. Whereas for  $P_1$  and  $P_2$ , the elements remain the same, for  $P_3$  the mass-lumping implies to make the abscissae of the interior points coincide with these of the Gauss-Lobatto quadrature rule. A Fourier analysis of the method for a regular mesh points out a superconvergence result. The gain of accuracy is illustrated by numerical experiments.

**Key-words:** Wave equation - Higher order finite elements - Mass-lumping - Fourier analysis - superconvergence.

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Présentation de la méthode</b>	<b>6</b>
1.1	Exposé de la problématique . . . . .	7
1.2	Condensation de masse . . . . .	9
<b>2</b>	<b>Analyse de l'approximation en espace pour un maillage uniforme sans second membre</b>	<b>12</b>
2.1	Les éléments de type $P_1$ . . . . .	13
2.2	Les éléments de type $P_2$ . . . . .	17
2.3	Les éléments de type $P_3$ : méthode de Gauss Lobatto . . . . .	26
<b>3</b>	<b>Analyse de la dispersion numérique pour le problème semi-discret</b>	<b>40</b>
<b>4</b>	<b>Discrétisation en temps d'ordre 2, 4 et 6</b>	<b>43</b>
4.1	Analyse de la stabilité . . . . .	45
4.2	Analyse de la dispersion . . . . .	49
<b>5</b>	<b>Résultats numériques</b>	<b>56</b>
5.1	Un premier problème modèle . . . . .	56
5.2	Un second problème modèle . . . . .	68
<b>6</b>	<b>Conclusion</b>	<b>79</b>
<b>A</b>	<b>Démonstration du lemme 1</b>	<b>80</b>
<b>B</b>	<b>Démonstration du lemme 2</b>	<b>82</b>

# Introduction

La résolution de l'équation des ondes en régime transitoire par des méthodes numériques est un problème délicat mais fondamental pour la modélisation d'un grand nombre de phénomènes physiques (acoustique, élastodynamique, électromagnétisme ...) pour lesquels l'équation des ondes est un problème modèle. L'approximation numérique de ce type d'équation est indispensable pour deux configurations où les méthodes analytiques sont inutilisables :

- milieux hétérogènes
- domaines de géométrie quelconque

Pour les milieux hétérogènes, dans des domaines rectangulaires, rencontrés notamment en géophysique, les méthodes de différences finies centrées sont classiquement utilisées et ont été largement étudiées, d'abord à l'ordre 2 [2] ou [11], puis à l'ordre 4 en espace [1] et en temps [4], [6], [5], [13]. Cette étude a montré la supériorité des méthodes d'ordre 4, tant du point de vue de la précision que de celui de la dispersion numérique.

Pour les domaines de géométrie quelconque, même en milieu homogène, les différences finies sont naturellement moins adaptées et moins maniables que les éléments finis. Cependant, en contrepartie de leur maniabilité du point de vue géométrique, les méthodes d'éléments finis présentent un certain nombre d'inconvénients, tels la présence d'une matrice de masse et l'existence d'ondes parasites pour les méthodes d'ordre élevé.

Le but de cette étude est de construire et d'analyser à l'aide de la transformée de Fourier une classe d'éléments finis de type Lagrange en dimension 1, puis en dimension 2, qui assureront une condensation de la matrice de masse et une précision comparable à celle des méthodes de différences finies d'ordre 4. Cette précision est théoriquement obtenue pour les éléments finis de type  $P_3$  (cf. [3]).

Pour ces éléments, la condensation de masse, réalisée par la formule de quadrature de Gauss-Lobatto amène à modifier la position des nœuds intérieurs. En outre, l'analyse par Fourier de ces méthodes met en évidence un phénomène de super-convergence dans le cas des maillages réguliers.

Une comparaison avec les éléments de Lagrange standards montre qu'un gain de précision et de temps de calcul substantiel est réalisé à l'aide de ce type de

méthodes.

Le plan que nous allons suivre dans ce cours est le suivant. Nous présentons le principe de notre méthode de façon assez détaillée au chapitre 1. Le chapitre 2 est consacré à l'analyse de l'approximation et l'obtention d'estimation d'erreur dans le cas 1D avec maillage régulier. Dans le chapitre 3, nous nous intéressons au cas 2D.

# Chapitre 1

## Présentation de la méthode

Nous allons considérer, dans ce travail, le problème modèle associé au problème de Cauchy sur  $\mathbb{R}$ , pour l'équation des ondes à coefficients constants (la vitesse de propagation des ondes est choisie égale à 1). Il va de soi que la plupart de ce que nous dirons s'étend sans modification majeure à des modèles plus complexes (introduction d'un second membre, milieu hétérogène, conditions aux limites ...).

Notre problème modèle s'écrit :

$$(1.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u : \mathbb{R} \times ]0, T[ \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{tel que :} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = 0 \quad \text{dans } \mathbb{R} \times ]0, T[ \\ u(x, 0) = u_0(x) \quad \text{dans } \mathbb{R} \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = u_1(x) \quad \text{dans } \mathbb{R} \end{array} \right.$$

Comme nous allons nous intéresser à l'approximation par éléments finis, l'outil de base est la formulation variationnelle qui s'écrit :

$$(1.2) \quad \frac{d^2}{dt^2} \int_{\mathbb{R}} u \, v \, dx + \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} \, dx = 0 \quad \forall v \in H^1(\mathbb{R})$$



## 1.1 Exposé de la problématique

La présentation sera faite sur  $\mathbb{R}$  tout entier, tout d'abord pour ne pas avoir à introduire de conditions aux limites et pour pouvoir d'autre part utiliser la transformée de Fourier.

Si nous désignons  $V_h^k(\mathbb{R}) = \{v \in H^1(\mathbb{R}) \mid \forall j \in \mathbb{Z} \quad v|_{[x_j, x_{j+1}]} \in P_k\}$  l'espace d'éléments finis de Lagrange d'ordre  $k$  associé à un maillage  $\{x_j\}$  de  $\mathbb{R}$ , le problème semi discrétisé en espace s'écrit :

$$(1.3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u_h(t) : \mathbb{R} \rightarrow V_h^k(\mathbb{R}) \text{ tel que :} \\ \forall v_h \in V_h^k(\mathbb{R}) \quad \frac{d^2}{dt^2} \int_{\mathbb{R}} u_h(x, t) v_h(x) dx + \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial u_h}{\partial x}(x, t) \frac{\partial v_h}{\partial x}(x) dx = 0 \\ u_h(x, 0) = u_{0,h}(x) \quad \text{dans } \mathbb{R} \\ \frac{\partial u_h}{\partial t}(x, 0) = u_{1,h}(x) \quad \text{dans } \mathbb{R} \end{array} \right.$$

Si  $(\lambda_j)_{j \in \mathbb{Z}}$  désigne une base de  $V_h^k(\mathbb{R})$ , (1.3) est équivalent au système différentiel (infini) :

$$(1.4) \quad \left\{ \begin{array}{l} M_h \frac{d^2 u_h}{dt^2}(t) + K_h u_h(t) = 0 \\ \text{avec } \left\{ \begin{array}{l} (M_h)_{p,q} = \int_{\mathbb{R}} \lambda_p(x) \lambda_q(x) dx \\ (K_h)_{p,q} = \int_{\mathbb{R}} \frac{d\lambda_p}{dx}(x) \frac{d\lambda_q}{dx}(x) dx \end{array} \right. \\ + \text{ conditions initiales} \end{array} \right.$$

Classiquement,  $M_h$  et  $K_h$  sont les matrices (ici infinies car nous n'avons pas introduit les bords) de masse et de rigidité du problème. Si on fait le choix canonique pour la base  $(\lambda_j)$  de  $V_h^k$ , on remarque alors que pour  $k=1$ ,  $M_h$  est tridiagonale, pour  $k=2$ ,  $M_h$  est pentadiagonale et pour  $k=3$ ,  $M_h$  est heptadiagonale. De ce fait, après discrétisation en temps, la résolution du problème passe par l'inversion d'une matrice symétrique définie positive. Et ceci même si on utilise une discrétisation en temps d'ordre 2 :

$$M_h \frac{u_h^{n+1} - 2u_h^n + u_h^{n-1}}{\Delta t^2} + K_h u_h^n = 0$$

Compte tenu des tailles des maillages couramment utilisés pour ce type de problèmes, l'inversion de la matrice  $M_h$  est à prohiber (surtout en dimension 2 ou 3 où la taille des matrices de masse est encore plus grande). Ce problème disparaîtrait complètement si la matrice  $M_h$  était diagonale.

Le but de cette étude est donc de trouver une méthode permettant d'aboutir à la condensation de masse, c'est à dire une diagonalisation de  $M_h$ , sans nuire à la précision des calculs.

## 1.2 Condensation de masse

Le procédé de condensation de masse est bien connu pour le cas des éléments finis  $P_1$ . Il passe par l'utilisation d'une formule de quadrature numérique, en l'occurrence la formule des trapèzes, pour l'évaluation des intégrales définissant les éléments de la matrice  $M_h$ . On aboutit au double phénomène suivant :

- (i) Les éléments non diagonaux de  $M_h$  sont nuls.
- (ii) On ne perturbe pas la précision du schéma numérique.

En fait cette méthode donne en dimension 1, une méthode de différences finies d'ordre 2.

Notre but ici est de généraliser cette technique au cas des éléments de degré plus élevé et en particulier aux éléments  $P_3$  qui se posent en concurrents naturels aux méthodes de différences finies du 4<sup>e</sup> ordre actuellement utilisées pour de nombreuses applications [5], [7], [13], [14], [15].

Nous avons un double objectif à atteindre, à savoir (i) et (ii). Pour cela nous allons jouer sur deux tableaux :

- 1-Utiliser une base nouvelle (ou en d'autres termes de nouveaux degrés de liberté) pour la représentation de l'espace  $V_h$ .
- 2-Utiliser une formule d'intégration numérique adaptée à l'intérieur de chaque élément.

Pour atteindre l'objectif (ii), nous nous référons aux travaux de Ciarlet [3] qui nous apprennent que si on utilise des éléments finis  $P_k$ , il faut faire appel à une formule d'intégration numérique exacte pour les polynômes de degré  $2k - 1$ . Pour atteindre l'objectif (i), commençons par rappeler qu'une formule d'intégration numérique sur un segment  $[x_j, x_{j+1}]$  s'écrit :

$$\int_{x_j}^{x_{j+1}} f(x)dx \simeq \sum_l \omega_j^l f(x_j^l)$$

ou  $x_j^l$  sont les points de quadrature et  $\omega_j^l$  les poids associés.

Nous supposons maintenant que  $\{x_j\}$  désigne l'ensemble des nœuds du maillage d'éléments finis (c'est à dire les extrémités des segments) et que  $\{\xi_p\}$  désigne l'ensemble des degrés de liberté (rappelons que  $\{x_j\} \subset \{\xi_p\}$  pour obtenir une approximation conforme de  $H^1$ ) et nous désignons par  $\lambda_p$  la base de Lagrange associée aux  $\xi_p$  (c'est à dire  $\lambda_p(\xi_q) = \delta_p^q$  et  $\lambda_p \in V_h$ ). Sur cette base, les éléments de  $M_h$  sont définis par :

$$(M_h)_{p,q} = \sum_l \sum_m \omega_l^m \lambda_p(x_l^m) \lambda_q(x_l^m)$$

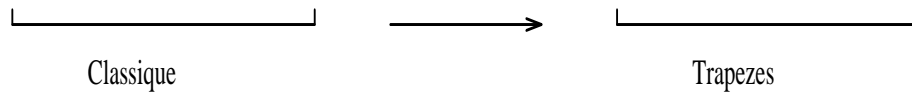
On remarque alors que si les degrés de liberté  $\{\xi_p\}$  associés à la base  $\lambda_p$  coïncident avec les points de quadrature  $\{x_l^m\}$ , alors pour  $p \neq q$  on a  $\lambda_p(x_l^m) \lambda_q(x_l^m) = 0$  pour tous  $l$  et  $m$  et la condensation de masse est alors réalisée.

Or, si l'on fait le choix usuel pour les nœuds  $\xi_p$ , il n'existe pas toujours de formule de quadrature utilisant les  $\xi_p$  comme points d'intégration et qui soit exacte pour les polynômes de degré  $2k - 1$ . C'est pourquoi nous serons amenés à éventuellement modifier la position de ces nœuds (attention il ne peut s'agir que des nœuds intérieurs, ceux qui sont distincts des  $x_j$ ) pour atteindre notre double objectif.

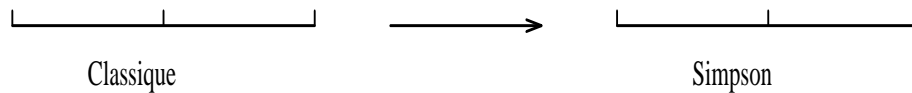
### Description des éléments finis et des formules de quadrature

Pour  $P_1$  et  $P_2$ , la structure des éléments reste inchangée, car les formules de quadrature adéquates sont respectivement les formules des trapèzes et de Simpson, dont les points de quadrature correspondent aux points d'interpolation. Par contre, pour  $P_3$ , nous devons déplacer les points intérieurs de l'élément de façon à ce qu'ils coïncident avec les points de quadrature de Gauss-Lobatto. Nous obtenons alors :

Formule des trapèzes :  $x_1 = 0 \quad x_2 = 1 \quad \omega_1 = \omega_2 = \frac{1}{2}$

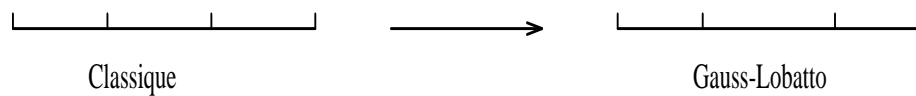


Formule de Simpson :  $x_1 = 0 \quad x_2 = \frac{1}{2} \quad x_3 = 1 \quad \omega_1 = \omega_3 = \frac{1}{6} \quad \omega_2 = \frac{2}{3}$



$$\text{Formule de Gauss-Lobatto: } x_1 = 0 \quad x_2 = \frac{5 - \sqrt{5}}{10} \quad x_3 = \frac{5 + \sqrt{5}}{10} \quad x_4 = 1$$

$$\omega_1 = \omega_4 = \frac{1}{12} \quad \omega_2 = \omega_3 = \frac{5}{12}$$



Ce type d'idée a été déjà introduit pour d'autres applications et apporté à notre connaissance par J-P Hennart[9] qui l'avait utilisé pour des problèmes stationnaires et paraboliques.

## Chapitre 2

# Analyse de l'approximation en espace pour un maillage uniforme sans second membre

Nous n'allons pas mener ici une analyse classique de l'approximation d'erreur par éléments finis telle qu'elle est faite par exemple dans [8] ou [12]. Nous allons considérer le cas d'un maillage régulier uniforme correspondant au choix :

$$x_j = jh \quad , \quad j \in \mathbb{Z}$$

$h$  désignant le pas du maillage. L'analyse que nous allons mener est une analyse de type "différences finies" faisant appel à la transformation de Fourier en espace. Nous allons ainsi pouvoir analyser finement la structure de la solution approchée et mettre en évidence l'existence de phénomènes parasites. Avant de nous lancer dans le détail des calculs, il convient de préciser quel sens il faut donner à notre étude d'erreur. En fait, plutôt que d'estimer exactement la différence  $u(x, t) - u_h(x, t)$  , nous estimerons des erreurs du type :

$$u(x, t) - \tilde{u}_h(x, t)$$

Où la fonction  $\tilde{u}_h(x, t)$  coïncidera avec  $u_h(x, t)$  en certains degrés de liberté. Nous aurons en fait autant de fonctions  $\tilde{u}_h(x, t)$  que de types de nœuds (ou degrés de liberté), c'est à dire 1 pour les éléments finis  $P_1$ , 2 pour les éléments finis  $P_2$  et 3 pour les éléments finis  $P_3$ . Pour plus de clarté nous avons choisi de présenter en détail, bien que cela soit classique, le cas des éléments finis  $P_1$  dans un premier temps.

## 2.1 Les éléments de type $P_1$

Le problème semi-discrétisé

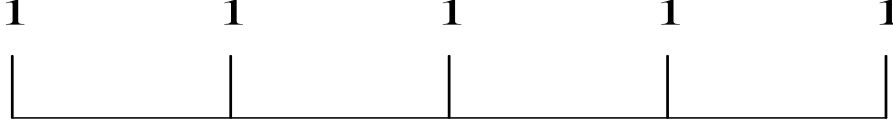


FIG. 2.1 - *maillage  $P_1$*

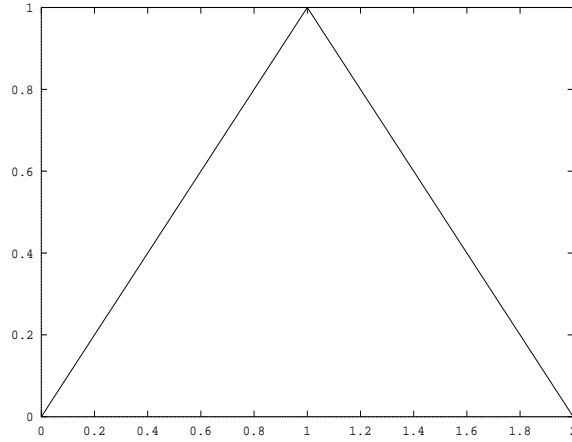


FIG. 2.2 -  $\lambda_j$

Il y a périodicité d'un seul type de points : les nœuds (cf. figure 2.1) où les fonctions de bases associées sont : cf. figure 2.2.

Si nous écrivons :

$$u_h(x, t) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} u_j(t) \lambda_j(x) \quad , \quad u_j(t) = u_h(x_j, t)$$

Le problème (1.4) est équivalent sur maillage régulier au système différentiel infini :

$$(2.1) \quad \frac{d^2 u_j}{dt^2}(t) - \frac{1}{h^2} (u_{j+1}(t) - 2u_j(t) + u_{j-1}(t)) = 0 \quad \forall j \in \mathbb{Z}$$

Nous supposons pour ce qui suit que les données initiales satisfont :

$$(2.2) \quad (u_0, u_1) \in H^3(\mathbb{R}) \times H^2(\mathbb{R})$$

ce qui est la régularité minimum qui permet d'obtenir le résultat d'approximation optimal. Construisons maintenant la fonction  $\tilde{u}_h(x, t)$  définie par :

$$(2.3) \quad \begin{cases} \frac{d^2 \tilde{u}_h}{dt^2}(x, t) - \frac{1}{h^2}(\tilde{u}_h(x+h, t) - 2\tilde{u}_h(x, t) + \tilde{u}_h(x-h, t)) = 0 \\ \tilde{u}_h(x, 0) = u_0(x) \\ \frac{\partial \tilde{u}_h}{\partial t}(x, 0) = u_1(x) \end{cases}$$

Par construction même:  $\forall i \quad \tilde{u}_h(x_i, t) = u_h(x_i, t)$

C'est en fait sur la fonction  $u - \tilde{u}_h$  que va porter notre analyse d'erreur. Notons que par ce procédé nous éludons le problème de l'approximation des données initiales. L'erreur obtenue est uniquement due à la discrétisation de l'équation.

### **Théorème 2.1 :**

*Nous faisons l'hypothèse (2.2), on a alors l'estimation d'erreur :*

$$\forall t \in [0, T] \quad \|\tilde{u}_h(\cdot, t) - u(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{B})} \leq \frac{t}{24} h^2 \left\{ \left\| \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} \right\|_{L^2(\mathbb{B})} + \sqrt{2} \left\| \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} \right\|_{L^2(\mathbb{B})} \right\}$$



## Démonstration

Nous allons passer par l'utilisation de la transformation de Fourier en espace :

$$\begin{aligned} u(x, t) &\rightarrow \hat{u}(k, t) \\ \tilde{u}_h(x, t) &\rightarrow \hat{u}_h(k, t) \end{aligned}$$

Où  $\hat{u}(k, t) = \int_{\mathbb{R}} u(x, t) \exp(-ikx) dx$

Il est facile de voir que  $\hat{u}(k, t)$  satisfait :

$$(2.4) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial t^2} + k^2 \hat{u} = 0 \\ \hat{u}(k, 0) = \hat{u}_0(k) \\ \frac{\partial \hat{u}}{\partial t}(k, 0) = \hat{u}_1(k) \end{cases}$$

D'où nous déduisons l'expression que nous utiliserons dans toute la suite :

$$(2.5) \quad \hat{u}(k, t) = \cos(kt) \hat{u}_0(k) + \frac{\sin(kt)}{k} \hat{u}_1(k)$$

De façon similaire,  $\hat{u}_h(k, t)$  satisfait :

$$(2.6) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 \hat{u}_h}{\partial t^2}(k, t) + \frac{4}{h^2} \sin^2\left(\frac{hk}{2}\right) \hat{u}_h(k, t) = 0 \\ \hat{u}_h(k, 0) = \hat{u}_0(k) \\ \frac{\partial \hat{u}_h}{\partial t}(k, 0) = \hat{u}_1(k) \end{cases}$$

En posant  $\omega_h = \frac{2}{h} |\sin(\frac{hk}{2})|$ , la solution de l'équation différentielle (2.6) est :

$$(2.7) \quad \hat{u}_h(k, t) = \cos(\omega_h(k)t) \hat{u}_0(k) + \frac{\sin(\omega_h(k)t)}{\omega_h(k)} \hat{u}_1(k)$$

Pour estimer  $\|\tilde{u}_h(\cdot, t) - u(\cdot, t)\|_{L^2}$ , nous utiliserons le théorème de Plancherel :

$$\|\tilde{u}_h(\cdot, t) - u(\cdot, t)\|_{L^2}^2 = \int_{\mathbb{R}} |\hat{u}_h(k, t) - \hat{u}(k, t)|^2 dk$$

Posons  $\hat{e}_h(k, t) = \hat{u}_h(k, t) - \hat{u}(k, t)$ , avec :

$$\begin{cases} \hat{e}_h(k, t) = \hat{e}_h^0(k, t) + \hat{e}_h^1(k, t) \\ \hat{e}_h^0(k, t) = [\cos(\omega_h(k)t) - \cos(kt)]\hat{u}_0(k) \\ \hat{e}_h^1(k, t) = \left[\frac{\sin(\omega_h(k)t)}{\omega_h(k)} - \frac{\sin(kt)}{k}\right]\hat{u}_1(k) \end{cases}$$

Estimation de  $e_h^0$

$$\|e_h^0(\cdot, t)\|^2 = \int_{\mathbb{R}} |\cos(\omega_h(k)t) - \cos(kt)|^2 \hat{u}_0^2(k) dk$$

Or nous avons les deux estimations (obtenues par la formule des accroissements finis) :

$$\begin{cases} (\cos(\omega_h(k)t) - \cos(kt))^2 \leq t^2(\omega_h(k) - k)^2 \\ (\omega_h(k) - k)^2 \leq \frac{k^6 h^4}{24^2} \end{cases}$$

Reportant ces deux estimations dans  $\|e_h^0(\cdot, t)\|^2$ , nous obtenons :

$$\|e_h^0(\cdot, t)\|^2 \leq \frac{t^2 h^4}{24^2} \int_{\mathbb{R}} k^6 \hat{u}_0^2(k) dk$$

C'est à dire, grâce au théorème de Plancherel :

$$\|e_h^0(\cdot, t)\|_{L^2}^2 \leq \frac{t^2 h^4}{24^2} \left\| \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} \right\|_{L^2}^2$$

Estimation de  $e_h^1$

$$\|e_h^1(\cdot, t)\|^2 = \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{\sin(\omega_h(k)t)}{\omega_h(k)} - \frac{\sin(kt)}{k} \right|^2 \hat{u}_1^2(k) dk$$

Or nous avons les estimations :

$$\begin{cases} |\sin(\omega_h(k)t) - \sin(kt)| \leq |\omega_h(k) - k|t \leq \frac{tk^3h^2}{24} \\ |\sin(\omega_h(k)t)| \leq |\omega_h(k)t| \end{cases}$$

Reportant ces estimations dans :

$$(2.8) \quad \frac{\sin(\omega_h(k)t)}{\omega_h(k)} - \frac{\sin(kt)}{k} = \sin(\omega_h(k)t) \left( \frac{k - \omega_h(k)}{k\omega_h(k)} \right) + \frac{1}{k} (\sin(\omega_h(k)t) - \sin(kt))$$

nous obtenons :

$$\|e_h^1(\cdot, t)\|^2 \leq \frac{2t^2h^4}{24^2} \int_{\mathbb{R}} k^4 \hat{u}_1^2(k) dk$$

Soit encore, par Plancherel :

$$\|e_h^1(\cdot, t)\|_{L^2}^2 \leq \frac{2t^2h^4}{24^2} \left\| \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} \right\|_{L^2}^2$$

□

## 2.2 Les éléments de type $P_2$

### Le problème semi-discretisé

Il y a périodicité de deux types de points : les nœuds et les milieux des éléments (cf. figure 2.3). Nous représentons les fonctions de base associées aux degrés de liberté correspondants dans la figure 2.4.

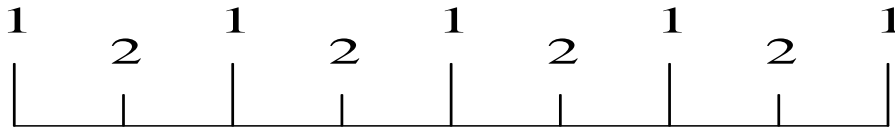


FIG. 2.3 - maillage  $P_2$

Les points notés 1 seront indicés par  $j$  et les points notés 2 seront indicés par  $j + \frac{1}{2}$  ( $j \in \mathbb{Z}$ )

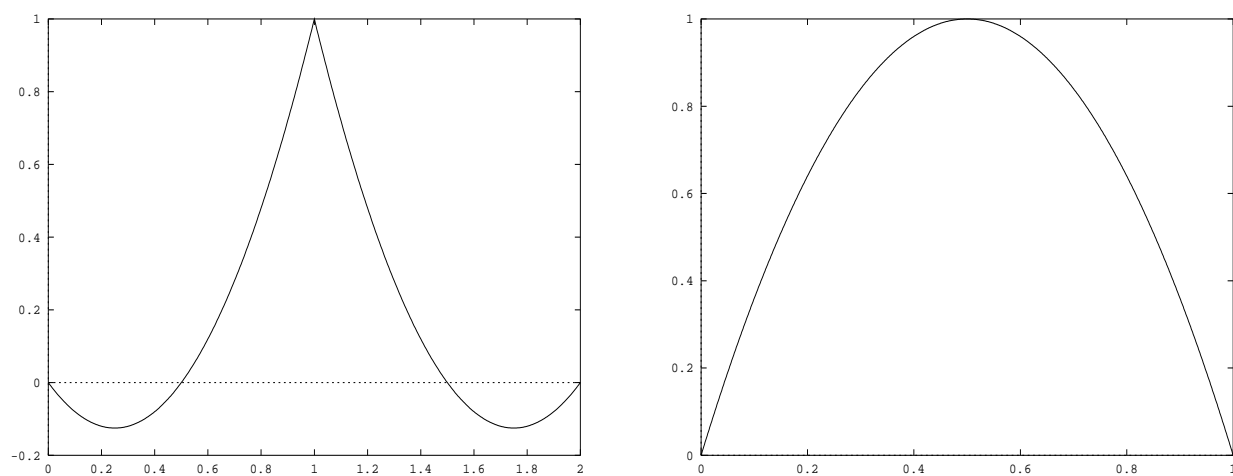


FIG. 2.4 -  $\lambda_j$  (à gauche) ,  $\lambda_{j+\frac{1}{2}}$  (à droite)

En posant :

$$u_h(x, t) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} u_j(t) \lambda_j(x) + \sum_{j \in \mathbb{Z}} u_{j+\frac{1}{2}}(t) \lambda_{j+\frac{1}{2}}(x)$$

Le problème (1.4) est équivalent sur maillage régulier au système différentiel :

$$(2.9) \quad \begin{cases} \frac{d^2 u_j}{dt^2}(t) + \frac{1}{h^2} (14u_j(t) - 8(u_{j+\frac{1}{2}}(t) + u_{j-\frac{1}{2}}(t)) + u_{j+1}(t) + u_{j-1}(t)) = 0 & \forall j \in \mathbb{Z} \\ \frac{d^2 u_{j+\frac{1}{2}}}{dt^2}(t) - \frac{4}{h^2} (u_j(t) - 2u_{j+\frac{1}{2}}(t) + u_{j+1}(t)) = 0 & \forall j \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Nous introduisons maintenant les solutions  $\tilde{u}_h(x, t)$  et  $\tilde{u}_{h+\frac{1}{2}}(x, t)$  du problème suivant :

$$(2.10) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 \tilde{u}_h}{\partial t^2}(x, t) + \frac{1}{h^2} (14\tilde{u}_h(x, t) - 8(\tilde{u}_{h+\frac{1}{2}}(x + \frac{h}{2}, t) + \tilde{u}_{h+\frac{1}{2}}(x - \frac{h}{2}, t)) \\ + u_h(x + h, t) + u_h(x - h, t)) = 0 \\ \frac{\partial^2 \tilde{u}_{h+\frac{1}{2}}}{\partial t^2}(x, t) - \frac{4}{h^2} (\tilde{u}_h(x + \frac{h}{2}, t) + \tilde{u}_h(x - \frac{h}{2}, t) - 2\tilde{u}_{h+\frac{1}{2}}(x, t)) = 0 \\ \tilde{u}_h(x, 0) = \tilde{u}_{h+\frac{1}{2}}(x, 0) = u_0(x) \quad \frac{\partial \tilde{u}_h}{\partial t}(x, 0) = \frac{\partial \tilde{u}_{h+\frac{1}{2}}}{\partial t}(x, 0) = u_1(x) \end{cases}$$

Il est facile de vérifier que  $\tilde{u}_h(x, t)$  interpole  $u_h(x, t)$  aux nœuds  $x_i$  :

$$\tilde{u}_h(x_i, t) = u_h(x_i, t)$$

alors que  $\tilde{u}_{h+\frac{1}{2}}(x, t)$  interpole  $u_h(x, t)$  aux nœuds  $x_{i+\frac{1}{2}}$  :

$$\tilde{u}_{h+\frac{1}{2}}(x_{i+\frac{1}{2}}, t) = u_h(x_{i+\frac{1}{2}}, t)$$

nous allons estimer les erreurs  $\tilde{u}_h - u$  et  $\tilde{u}_{h+\frac{1}{2}} - u$

**Théorème 2.2 :**

Nous supposons maintenant que  $(u_0, u_1) \in H^5(\mathbb{R}) \times H^4(\mathbb{R})$ . La solution  $(\tilde{u}_h, \tilde{u}_{h+\frac{1}{2}})$  de (2.10) admet la décomposition suivante :

$$\begin{cases} \tilde{u}_h = \tilde{u}_h^{np} + \tilde{u}_h^p \\ \tilde{u}_{h+\frac{1}{2}} = \tilde{u}_{h+\frac{1}{2}}^{np} + \tilde{u}_{h+\frac{1}{2}}^p \end{cases}$$

où par définition :

$(\tilde{u}_h^{np}, \tilde{u}_{h+\frac{1}{2}}^{np})$  désigne la partie physique de la solution.

$(\tilde{u}_h^p, \tilde{u}_{h+\frac{1}{2}}^p)$  désigne la partie parasite de la solution.

De plus, on a les estimations suivantes :

-Pour l'onde physique :

$$\begin{aligned} \|\tilde{u}_h^{np} - u\|_{L^2(\mathbb{B})} &\leq Ch^4 \left\{ \left\| \frac{\partial^4 u_0}{\partial x^4} \right\|_{L^2(\mathbb{B})} + t \left\| \frac{\partial^5 u_0}{\partial x^5} \right\|_{L^2(\mathbb{B})} + 2t \left\| \frac{\partial^4 u_1}{\partial x^4} \right\|_{L^2(\mathbb{B})} \right\} \\ \|\tilde{u}_{h+\frac{1}{2}}^{np} - u\|_{L^2(\mathbb{B})} &\leq Ch^4 \left\{ \left\| \frac{\partial^4 u_0}{\partial x^4} \right\|_{L^2(\mathbb{B})} + t \left\| \frac{\partial^5 u_0}{\partial x^5} \right\|_{L^2(\mathbb{B})} + 2t \left\| \frac{\partial^4 u_1}{\partial x^4} \right\|_{L^2(\mathbb{B})} \right\} \end{aligned}$$

-Pour l'onde parasite :

$$\begin{aligned} \|\tilde{u}_h^p\|_{L^2(\mathbb{B})} &\leq Ch^4 \left\{ \left\| \frac{\partial^4 u_0}{\partial x^4} \right\|_{L^2(\mathbb{B})} + t \left\| \frac{\partial^4 u_1}{\partial x^4} \right\|_{L^2(\mathbb{B})} \right\} \\ \|\tilde{u}_{h+\frac{1}{2}}^p\|_{L^2(\mathbb{B})} &\leq Ch^4 \left\{ \left\| \frac{\partial^4 u_0}{\partial x^4} \right\|_{L^2(\mathbb{B})} + t \left\| \frac{\partial^4 u_1}{\partial x^4} \right\|_{L^2(\mathbb{B})} \right\} \end{aligned}$$

**Remarques:**

-Nous appelons onde parasite toute onde qui n'a pas d'équivalent dans la solution exacte.

$\|\tilde{u}_h^{np} - u\|$  représente "l'erreur aux nœuds entiers".

$\|\tilde{u}_{h+\frac{1}{2}}^{np} - u\|$  représente "l'erreur aux autres nœuds" (c'est à dire aux milieux des éléments).

-Nous avons une erreur en  $O(h^4)$  au lieu de  $O(h^3)$  classiquement obtenue pour  $P_2$  (cf. [3]); il y a donc superconvergence.

## Démonstration

En appliquant la transformation de Fourier en espace au système (2.10) on obtient :

$$\begin{aligned}\tilde{u}_h(x, t) &\rightarrow \hat{u}_h(k, t) \\ \tilde{u}_{h+\frac{1}{2}}(x, t) &\rightarrow \hat{u}_{h+\frac{1}{2}}(k, t)\end{aligned}$$

La première équation du système (2.10) s'écrit alors : (en appliquant les propriétés de la transformée de Fourier)

$$\frac{\partial^2 \hat{u}_h}{\partial t^2}(k, t) + \frac{1}{h^2} [14\hat{u}_h(k, t) - 8\hat{u}_{h+\frac{1}{2}}(k, t)(e^{ikh/2} + e^{-ikh/2}) + \hat{u}_h(k, t)(e^{ikh} + e^{-ikh})] = 0$$

d'où en regroupant les termes semblables :

$$\frac{\partial^2 \hat{u}_h}{\partial t^2}(k, t) + \frac{2}{h^2} [\hat{u}_h(k, t)(7 + \cos(hk)) - 8 \cos(\frac{hk}{2}) \hat{u}_{h+\frac{1}{2}}(k, t)] = 0$$

On effectue les mêmes transformations a l'autre équation, pour obtenir :

$$\begin{aligned}\widehat{M}_{1,2,h} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \begin{pmatrix} \hat{u}_h(k, t) \\ \hat{u}_{h+\frac{1}{2}}(k, t) \end{pmatrix} + \widehat{K}_{1,2,h}(k) \begin{pmatrix} \hat{u}_h(k, t) \\ \hat{u}_{h+\frac{1}{2}}(k, t) \end{pmatrix} &= 0 \\ \text{(2.11)} \quad \text{avec } \widehat{M}_{1,2,h} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{et } \widehat{K}_{1,2,h}(k) = \frac{2}{h^2} \begin{bmatrix} 7 + \cos hk & -8 \cos \frac{hk}{2} \\ -8 \cos \frac{hk}{2} & 8 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

de plus, on a les conditions initiales :

$$\hat{u}_h(k, 0) = \hat{u}_{h+\frac{1}{2}}(k, 0) = \hat{u}_0(k) \quad \text{et} \quad \frac{\partial \hat{u}_h}{\partial t}(k, 0) = \frac{\partial \hat{u}_{h+\frac{1}{2}}}{\partial t}(k, 0) = \hat{u}_1(k)$$

On notera que les matrices  $\widehat{M}_{1,2,h}$  et  $\widehat{K}_{1,2,h}$  sont symétriques définies positives. Pour exprimer la solution de (2.11), il nous faut diagonaliser le système et donc introduire les solutions du problème de valeurs propres :

$$\widehat{N}_{1,2,h}(k)U = \lambda U$$

$$\text{avec } \widehat{N}_{1,2,h}(k) = \widehat{M}_{1,2,h}^{-1} \widehat{K}_{1,2,h}(k)$$

Nous désignons par  $\lambda_h^1(k)$  et  $\lambda_h^2(k)$ , les deux valeurs propres positives et  $W_h^1(k)$  et  $W_h^2(k)$  les vecteurs propres associés normalisés par  $M_{1,2,h}$  :

$$(M_{1,2,h} W_h^i(k), W_h^j(k)) = \delta_{i,j}$$

$(.,.)$  est le produit scalaire dans  $\mathbb{R}^2$  et  $\delta_{i,j}$  est le symbole de kronecker.

Nous avons le :

**Lemme 2.1** *Les valeurs propres  $\lambda_h^1(k)$  et  $\lambda_h^2(k)$ , et les vecteurs propres  $W_h^1(k)$  et  $W_h^2(k)$  admettent les développements limités suivants :*

$$\begin{cases} \lambda_h^1(k) = k^2 - \frac{h^4 k^6}{1440} + O(h^5) \\ W_h^1(k) = X_0 + a_4 Y_0 h^4 k^4 + a_6 Y_0 h^6 k^6 + O(h^7) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda_h^2(k) = \frac{24}{h^2} - 2k^2 + \frac{h^2 k^4}{12} - \frac{h^4 k^6}{480} + O(h^5) \\ W_h^2(k) = Y_0 - a_4 X_0 h^4 k^4 - 2a_6 X_0 h^6 k^6 + O(h^7) \end{cases}$$

$$X_0 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad Y_0 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad a_4 = \frac{\sqrt{2}}{1152} \quad a_6 = \frac{\sqrt{2}}{13824}$$

**Démonstration :** voir annexe A.

Nous dirons alors que  $\lambda_h^1$  est la valeur propre physique (en effet  $\lambda_h^1 \rightarrow k^2$ ) et  $\lambda_h^2$  est la valeur propre parasite ( $\lambda_h^2 \rightarrow +\infty$ ).



Un calcul élémentaire montre que la solution de (2.11) s'écrit alors :

$$\widehat{U}_h(k, t) = \begin{pmatrix} \hat{u}_h(k, t) \\ \hat{u}_{h+\frac{1}{2}}(k, t) \end{pmatrix} = \widehat{U}_h^1(k, t)W_h^1(k) + \widehat{U}_h^2(k, t)W_h^2(k)$$

$$\text{avec } \begin{cases} \widehat{U}_h^j(k, t) = \hat{u}_0(k)\alpha_h^j(k) \cos(\omega_h^j(k)t) + \hat{u}_1(k)\alpha_h^j(k) \frac{\sin(\omega_h^j(k)t)}{\omega_h^j(k)} \quad \forall j = 1, 2 \\ \alpha_h^j(k) = ((Id_2, W_h^j(k))) \quad \forall j = 1, 2 \\ Id_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \omega_h^j(k) = \sqrt{\lambda_h^j(k)} \quad \forall j = 1, 2 \end{cases}$$

On remarquera que  $\widehat{U}_h^1 W_h^1$  correspond à la partie physique, c'est à dire :

$$\widehat{U}_h^1 W_h^1 = \begin{pmatrix} \hat{u}_h^{np} \\ \hat{u}_{h+\frac{1}{2}}^{np} \end{pmatrix}$$

alors que  $\widehat{U}_h^2 W_h^2$  correspond à la partie parasite, c'est à dire :

$$\widehat{U}_h^2 W_h^2 = \begin{pmatrix} \hat{u}_h^p \\ \hat{u}_{h+\frac{1}{2}}^p \end{pmatrix}$$

Estimation de  $\|\tilde{u}_h^{np} - u\|$  et de  $\|\tilde{u}_{h+\frac{1}{2}}^{np} - u\|$

Pour estimer  $\|\tilde{u}_h^{np} - u\|$  et  $\|\tilde{u}_{h+\frac{1}{2}}^{np} - u\|$ , nous utiliserons le théorème de Plancherel :

$$\|\tilde{u}_h^{np} - u\|_{L^2(\mathbb{B})} = \|\hat{u}_h^{np} - \hat{u}\|_{L^2(\mathbb{B})}$$

$$\|\tilde{u}_{h+\frac{1}{2}}^{np} - u\|_{L^2(\mathbb{B})} = \|\hat{u}_{h+\frac{1}{2}}^{np} - \hat{u}\|_{L^2(\mathbb{B})}$$

Posons

$$\begin{pmatrix} \hat{e}_h^{np}(k, t) \\ \hat{e}_{h+\frac{1}{2}}^{np}(k, t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{u}_h^{np} - \hat{u} \\ \hat{u}_{h+\frac{1}{2}}^{np} - \hat{u} \end{pmatrix} = \widehat{U}_h^1 W_h^1 - \hat{u} Id_2$$

On obtient alors, grâce à l'inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned}
\|\hat{e}_h^{np}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{B})} &\leq \left( \int_{\mathbb{B}} [\hat{u}_0(k) \cos(\omega_h^1(k)t) + \hat{u}_1(k) \frac{\sin(\omega_h^1(k)t)}{\omega_h^1(k)}]^2 [\alpha_h^1(k)(W_h^1(k))_1 - 1]^2 dk \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\quad + \left( \int_{\mathbb{B}} \hat{u}_0^2(k) [\cos(\omega_h^1(k)t) - \cos(kt)]^2 dk \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\quad + \left( \int_{\mathbb{B}} \hat{u}_1^2(k) \left[ \frac{\sin(\omega_h^1(k)t)}{\omega_h^1(k)} - \frac{\sin(kt)}{k} \right]^2 dk \right)^{\frac{1}{2}} \\
\|\hat{e}_{h+\frac{1}{2}}^{np}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{B})} &\leq \left( \int_{\mathbb{B}} [\hat{u}_0(k) \cos(\omega_h^1(k)t) + \hat{u}_1(k) \frac{\sin(\omega_h^1(k)t)}{\omega_h^1(k)}]^2 [\alpha_h^1(k)(W_h^1(k))_2 - 1]^2 dk \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\quad + \left( \int_{\mathbb{B}} \hat{u}_0^2(k) [\cos(\omega_h^1(k)t) - \cos(kt)]^2 dk \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\quad + \left( \int_{\mathbb{B}} \hat{u}_1^2(k) \left[ \frac{\sin(\omega_h^1(k)t)}{\omega_h^1(k)} - \frac{\sin(kt)}{k} \right]^2 dk \right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

En procédant comme au théorème 1, nous avons les estimations :

$$\begin{cases} |\cos(\omega_h^1(k)t) - \cos(kt)| \leq Ch^4 k^5 t \\ \left| \frac{\sin(\omega_h^1(k)t)}{\omega_h^1(k)} - \frac{\sin(kt)}{k} \right| \leq Ch^4 k^4 t \end{cases}$$

Par ailleurs :

$$(2.12) \quad \begin{cases} |\hat{u}_0(k) \cos(\omega_h^i(k)t) + \hat{u}_1(k) \frac{\sin(\omega_h^i(k)t)}{\omega_h^i(k)}| \leq |\hat{u}_0(k)| + |\hat{u}_1(k)|t \quad \forall i = 1, 2 \\ |(\alpha_h^1(k)W_h^1(k) - Id_2)_1| \leq Ch^4 k^4 \\ |(\alpha_h^1(k)W_h^1(k) - Id_2)_2| \leq Ch^4 k^4 \end{cases}$$

Reportant ces estimations dans  $\|\hat{e}_h^{np}(\cdot, t)\|$ , nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\|\hat{e}_h^{np}(\cdot, t)\| &\leq Ch^4 \left[ \left( \int_{\mathbb{B}} k^8 |\hat{u}_0(k)|^2 dk \right)^{\frac{1}{2}} + t \left( \int_{\mathbb{B}} k^8 |\hat{u}_1(k)|^2 dk \right)^{\frac{1}{2}} \right. \\
&\quad \left. + t \left( \int_{\mathbb{B}} k^{10} |\hat{u}_0(k)|^2 dk \right)^{\frac{1}{2}} + t \left( \int_{\mathbb{B}} k^8 |\hat{u}_1(k)|^2 dk \right)^{\frac{1}{2}} \right]
\end{aligned}$$

Soit, par Plancherel :

$$\|\hat{e}_h^{np}(\cdot, t)\| \leq Ch^4 \left\{ \left\| \frac{\partial^4 u_0}{\partial x^4} \right\| + t \left\| \frac{\partial^5 u_0}{\partial x^5} \right\| + 2t \left\| \frac{\partial^4 u_1}{\partial x^4} \right\| \right\}$$

En reportant de la même façon ces estimations dans  $\|\hat{e}_{h+\frac{1}{2}}^{np}(\cdot, t)\|$  et par un raisonnement analogue, nous obtenons :

$$\|\hat{e}_{h+\frac{1}{2}}^{np}(\cdot, t)\| \leq Ch^4 \left\{ \left\| \frac{\partial^4 u_0}{\partial x^4} \right\| + t \left\| \frac{\partial^5 u_0}{\partial x^5} \right\| + 2t \left\| \frac{\partial^4 u_1}{\partial x^4} \right\| \right\}$$

Estimation de  $\|\tilde{u}_h^p\|$  et de  $\|\tilde{u}_{h+\frac{1}{2}}^p\|$

Pour estimer  $\|\tilde{u}_h^p\|$  et  $\|\tilde{u}_{h+\frac{1}{2}}^p\|$ , nous utiliserons encore le théorème de Plancherel :

$$\|\tilde{u}_h^p\|_{L^2(\mathbb{R})} = \|\hat{u}_h^p\|_{L^2(\mathbb{R})}$$

$$\|\tilde{u}_{h+\frac{1}{2}}^p\|_{L^2(\mathbb{R})} = \|\hat{u}_{h+\frac{1}{2}}^p\|_{L^2(\mathbb{R})}$$

Posons

$$\begin{pmatrix} \hat{e}_h^p(k, t) \\ \hat{e}_{h+\frac{1}{2}}^p(k, t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{u}_h^p \\ \hat{u}_{h+\frac{1}{2}}^p \end{pmatrix} = \hat{U}_h^2 W_h^2$$

On obtient alors :

$$\|\hat{e}_h^p(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 = \int_{\mathbb{R}} \left[ \hat{u}_0(k) \cos(\omega_h^2(k)t) + \hat{u}_1(k) \frac{\sin(\omega_h^2(k)t)}{\omega_h^2(k)} \right]^2 [\alpha_h^2(k)(W_h^2(k))_1]^2 dk$$

$$\|\hat{e}_{h+\frac{1}{2}}^p(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 = \int_{\mathbb{R}} \left[ \hat{u}_0(k) \cos(\omega_h^2(k)t) + \hat{u}_1(k) \frac{\sin(\omega_h^2(k)t)}{\omega_h^2(k)} \right]^2 [\alpha_h^2(k)(W_h^2(k))_2]^2 dk$$

Or nous avons :  $\alpha_h^2(k)W_h^2(k) = C_4 h^4 k^4 Id_2 + O(h^5)$

Par conséquent en utilisant le théorème de Plancherel et grâce à la majoration donnée dans (2.12), nous obtenons :

$$\|\hat{e}_h^p(\cdot, t)\| \leq Ch^4 \left\{ \left\| \frac{\partial^4 u_0}{\partial x^4} \right\| + t \left\| \frac{\partial^4 u_1}{\partial x^4} \right\| \right\}$$

On obtient de même :

$$\|\hat{e}_{h+\frac{1}{2}}^p(\cdot, t)\| \leq Ch^4 \left\{ \left\| \frac{\partial^4 u_0}{\partial x^4} \right\| + \left\| \frac{\partial^4 u_1}{\partial x^4} \right\| \right\}$$

□

## 2.3 Les éléments de type $P_3$ : méthode de Gauss Lobatto

### Le problème semi-discrétisé

Il y a périodicité de trois types de points : les nœuds et les deux points intérieurs aux éléments (cf. figure 2.5). Nous représentons les fonctions de base associées aux degrés de liberté correspondants dans les figures 2.6 et 2.7.

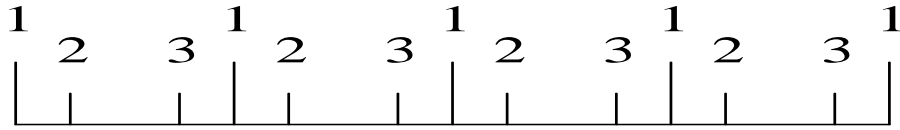


FIG. 2.5 - *maillage  $P_3$*

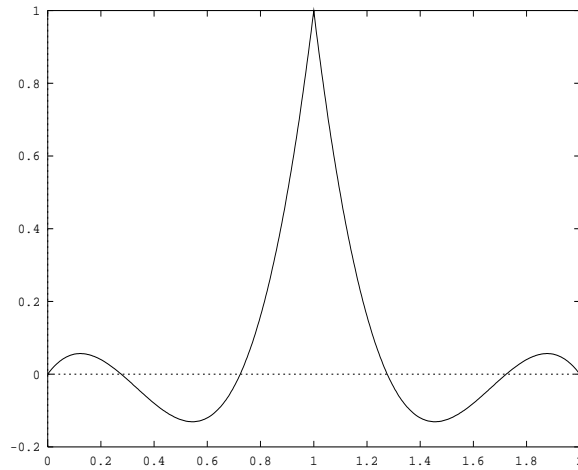
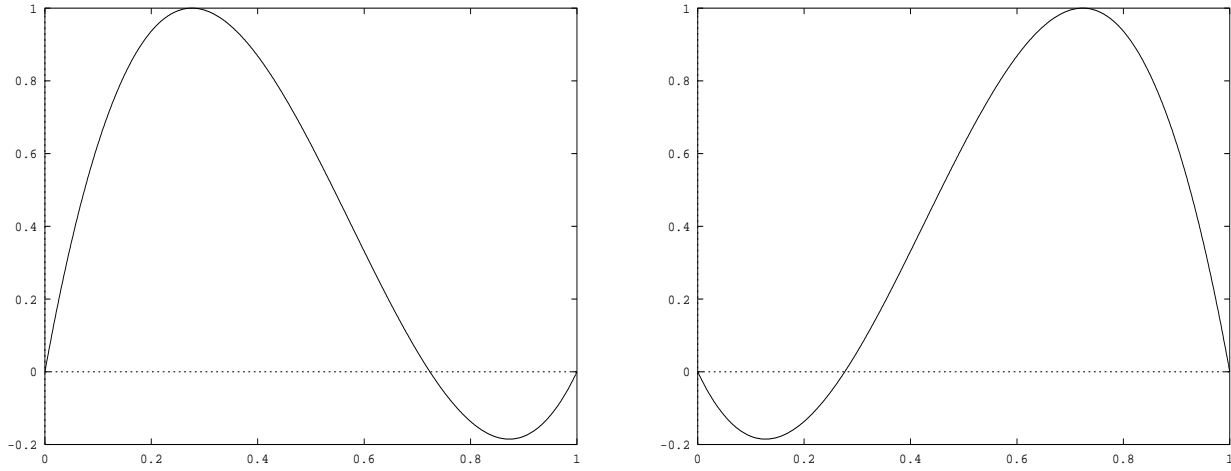


FIG. 2.6 -  $\lambda_j$

Les points notés 1, 2 et 3 seront respectivement indicés par  $j$ ,  $j + \mu$  et  $j + \nu$  ( $j \in \mathbb{Z}$ )


 FIG. 2.7 -  $\lambda_{j+\mu}$  (à gauche) ,  $\lambda_{j+\nu}$  (à droite)

En fait  $\mu$  et  $\nu$  sont les coordonnées des points de gauss lobatto sur le segment de référence  $[0, 1]$ .

$$\mu = \frac{5 - \sqrt{5}}{10} \text{ et } \nu = \frac{5 + \sqrt{5}}{10}$$

En posant :

$$u_h(x, t) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} u_j(t) \lambda_j(x) + \sum_{j \in \mathbb{Z}} u_{j+\mu}(t) \lambda_{j+\mu}(x) + \sum_{j \in \mathbb{Z}} u_{j+\nu}(t) \lambda_{j+\nu}(x)$$

Le problème (1.4) est équivalent sur maillage régulier au système différentiel :

$$(2.13) \left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2 u_j}{dt^2}(t) + \frac{1}{h^2} [52u_j(t) - \frac{5}{2}(5 + 3\sqrt{5})(u_{j-\mu}(t) + u_{j+\mu}(t)) \\ + \frac{5}{2}(3\sqrt{5} - 5)(u_{j-\nu}(t) + u_{j+\nu}(t)) - (u_{j-1}(t) + u_{j+1}(t))] = 0 \quad \forall j \in \mathbb{Z} \\ \frac{d^2 u_{j+\mu}}{dt^2}(t) + \frac{1}{h^2} [-(5 + 3\sqrt{5})u_j(t) + 20u_{j+\mu}(t) - 10u_{j+\nu}(t) \\ + (3\sqrt{5} - 5)u_{j+1}(t)] = 0 \quad \forall j \in \mathbb{Z} \\ \frac{d^2 u_{j+\nu}}{dt^2}(t) + \frac{1}{h^2} [(3\sqrt{5} - 5)u_j(t) - 10u_{j+\mu}(t) + 20u_{j+\nu}(t) \\ - (5 + 3\sqrt{5})u_{j+1}(t)] = 0 \quad \forall j \in \mathbb{Z} \end{array} \right.$$

où  $\mu = \frac{5 - \sqrt{5}}{10}$  et  $\nu = \frac{5 + \sqrt{5}}{10}$

Nous introduisons maintenant les solutions  $\tilde{u}_h(x, t)$ ,  $\tilde{u}_{h+\mu}(x, t)$  et  $\tilde{u}_{h+\nu}(x, t)$  du problème suivant :

$$(2.14) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \tilde{u}_h}{\partial t^2}(x, t) + \frac{1}{h^2} [52\tilde{u}_h(x, t) - \frac{5}{2}(5 + 3\sqrt{5})(\tilde{u}_{h+\mu}(x + \mu h, t) + \tilde{u}_{h+\nu}(x - \mu h, t)) \\ + \frac{5}{2}(3\sqrt{5} - 5)(\tilde{u}_{h+\mu}(x - \nu h, t) + \tilde{u}_{h+\nu}(x + \nu h, t)) \\ - (\tilde{u}_h(x + h, t) + \tilde{u}_h(x - h, t))] = 0 \\ \\ \frac{\partial^2 \tilde{u}_{h+\mu}}{\partial t^2}(x, t) + \frac{1}{h^2} [-(5 + 3\sqrt{5})\tilde{u}_h(x - \mu h, t) + 20\tilde{u}_{h+\mu}(x, t) \\ - 10\tilde{u}_{h+\nu}(x + (\nu - \mu)h, t) + (3\sqrt{5} - 5)\tilde{u}_h(x + \nu h, t)] = 0 \\ \\ \frac{\partial^2 \tilde{u}_{h+\nu}}{\partial t^2}(x, t) + \frac{1}{h^2} [(3\sqrt{5} - 5)\tilde{u}_h(x - \nu h, t) - 10\tilde{u}_{h+\mu}(x + (\mu - \nu)h, t) \\ + 10\tilde{u}_{h+\nu}(x, t) - (5 + 3\sqrt{5})\tilde{u}_h(x + \mu h, t)] = 0 \\ \\ \tilde{u}_h(x, 0) = \tilde{u}_{h+\mu}(x, 0) = \tilde{u}_{h+\nu}(x, 0) = u_0(x) \\ \\ \frac{\partial \tilde{u}_h}{\partial t}(x, 0) = \frac{\partial \tilde{u}_{h+\mu}}{\partial t}(x, 0) = \frac{\partial \tilde{u}_{h+\nu}}{\partial t}(x, 0) = u_1(x) \end{array} \right.$$

Il est facile de vérifier que  $\tilde{u}_h(x, t)$  interpole  $u_h(x, t)$  aux nœuds  $x_i$  :

$$\tilde{u}_h(x_i, t) = u_h(x_i, t)$$

$\tilde{u}_{h+\mu}(x, t)$  interpole  $u_h(x, t)$  aux nœuds  $x_{i+\mu}$  :

$$\tilde{u}_{h+\mu}(x_{i+\mu}, t) = u_h(x_{i+\mu}, t)$$

et  $\tilde{u}_{h+\nu}(x, t)$  interpole  $u_h(x, t)$  aux nœuds  $x_{i+\nu}$  :

$$\tilde{u}_{h+\nu}(x_{i+\nu}, t) = u_h(x_{i+\nu}, t)$$

**Théorème 2.3 :**

Nous supposons maintenant que  $(u_0, u_1) \in H^7(\mathbb{R}) \times H^6(\mathbb{R})$ . La solution  $(\tilde{u}_h, \tilde{u}_{h+\mu}, \tilde{u}_{h+\nu})$  de (2.14) admet la décomposition suivante :

$$\begin{cases} \tilde{u}_h = \tilde{u}_h^{np} + \tilde{u}_h^p \\ \tilde{u}_{h+\mu} = \tilde{u}_{h+\mu}^{np} + \tilde{u}_{h+\mu}^p \\ \tilde{u}_{h+\nu} = \tilde{u}_{h+\nu}^{np} + \tilde{u}_{h+\nu}^p \end{cases}$$

où par définition :

$(\tilde{u}_h^{np}, \tilde{u}_{h+\mu}^{np}, \tilde{u}_{h+\nu}^{np})$  désigne la partie physique de la solution.

$(\tilde{u}_h^p, \tilde{u}_{h+\mu}^p, \tilde{u}_{h+\nu}^p)$  désigne la partie parasite de la solution.

De plus, on a les estimations suivantes :

-Pour l'onde physique :

$$\begin{aligned} \|\tilde{u}_h^{np} - u\|_{L^2(\mathbb{R})} &\leq Ch^6 \left\{ \left\| \frac{\partial^6 u_0}{\partial x^6} \right\|_{L^2(\mathbb{R})} + t \left\| \frac{\partial^7 u_0}{\partial x^7} \right\|_{L^2(\mathbb{R})} + 2t \left\| \frac{\partial^6 u_1}{\partial x^6} \right\|_{L^2(\mathbb{R})} \right\} \\ \|\tilde{u}_{h+\mu}^{np} - u\|_{L^2(\mathbb{R})} &\leq Ch^5 \left\{ \left\| \frac{\partial^6 u_0}{\partial x^6} \right\|_{L^2(\mathbb{R})} + t \left\| \frac{\partial^7 u_0}{\partial x^7} \right\|_{L^2(\mathbb{R})} + 2t \left\| \frac{\partial^6 u_1}{\partial x^6} \right\|_{L^2(\mathbb{R})} \right\} \\ \|\tilde{u}_{h+\nu}^{np} - u\|_{L^2(\mathbb{R})} &\leq Ch^5 \left\{ \left\| \frac{\partial^6 u_0}{\partial x^6} \right\|_{L^2(\mathbb{R})} + t \left\| \frac{\partial^7 u_0}{\partial x^7} \right\|_{L^2(\mathbb{R})} + 2t \left\| \frac{\partial^6 u_1}{\partial x^6} \right\|_{L^2(\mathbb{R})} \right\} \end{aligned}$$

-Pour l'onde parasite :

$$\begin{aligned} \|\tilde{u}_h^p\|_{L^2(\mathbb{R})} &\leq Ch^6 \left\{ \left\| \frac{\partial^6 u_0}{\partial x^6} \right\|_{L^2(\mathbb{R})} + t \left\| \frac{\partial^6 u_1}{\partial x^6} \right\|_{L^2(\mathbb{R})} \right\} \\ \|\tilde{u}_{h+\mu}^p\|_{L^2(\mathbb{R})} &\leq Ch^5 \left\{ \left\| \frac{\partial^6 u_0}{\partial x^6} \right\|_{L^2(\mathbb{R})} + t \left\| \frac{\partial^6 u_1}{\partial x^6} \right\|_{L^2(\mathbb{R})} \right\} \\ \|\tilde{u}_{h+\nu}^p\|_{L^2(\mathbb{R})} &\leq Ch^5 \left\{ \left\| \frac{\partial^6 u_0}{\partial x^6} \right\|_{L^2(\mathbb{R})} + t \left\| \frac{\partial^6 u_1}{\partial x^6} \right\|_{L^2(\mathbb{R})} \right\} \end{aligned}$$

**Remarques :**

$\|\tilde{u}_h^{np} - u\|$  représente “l'erreur aux nœuds entiers”.

$\|\tilde{u}_{h+\mu}^{np} - u\|$  et  $\|\tilde{u}_{h+\nu}^{np} - u\|$  représentent “l'erreur aux autres nœuds” (c'est à dire aux points intérieurs aux éléments).

-Nous avons une erreur en  $O(h^6)$  aux nœuds entiers, en  $O(h^5)$  aux autres nœuds au lieu de  $O(h^4)$  classiquement obtenue pour  $P_3$  (cf. [3]); il y a donc superconvergence.



### Démonstration

En appliquant la transformation de Fourier en espace au système (2.14) on obtient :

$$\begin{aligned}\tilde{u}_h(x, t) &\rightarrow \hat{u}_h(k, t) \\ \tilde{u}_{h+\mu}(x, t) &\rightarrow \hat{u}_{h+\mu}(k, t) \\ \tilde{u}_{h+\nu}(x, t) &\rightarrow \hat{u}_{h+\nu}(k, t)\end{aligned}$$

La première équation du système (2.14) s'écrit alors :

$$\begin{aligned}&\frac{\partial^2 \hat{u}_h}{\partial t^2}(k, t) + \frac{1}{h^2} [52\hat{u}_h(k, t) - \frac{5}{2}(5 + 3\sqrt{5})(\hat{u}_{h+\mu}(k, t)e^{ikh\mu} + \hat{u}_{h+\nu}(k, t))e^{-ikh\mu} \\ &+ \frac{5}{2}(3\sqrt{5} - 5)(\hat{u}_{h+\mu}(k, t)e^{-ikh\nu} + \hat{u}_{h+\nu}(k, t)e^{ikh\nu}) \\ &- (\hat{u}_h(k, t)e^{ikh} + \hat{u}_h(k, t))e^{-ikh}] = 0\end{aligned}$$

d'où en regroupant les termes semblables :

$$\begin{aligned}&\frac{\partial^2 \hat{u}_h}{\partial t^2}(k, t) + \frac{2}{h^2} [\hat{u}_h(k, t)(26 - \cos(hk)) \\ &\hat{u}_{h+\mu}(k, t)(-\frac{5}{4}(5 + 3\sqrt{5})e^{ikh\mu} + \frac{5}{4}(-5 + 3\sqrt{5})e^{-ikh\nu}) \\ &\hat{u}_{h+\nu}(k, t)(-\frac{5}{4}(5 + 3\sqrt{5})e^{-ikh\mu} + \frac{5}{4}(-5 + 3\sqrt{5})e^{ikh\nu})] = 0\end{aligned}$$

On effectue les mêmes transformations aux deux autres équations, pour obtenir :

$$(2.15) \quad \widehat{M}_{1,3,h} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \begin{pmatrix} \hat{u}_h(k, t) \\ \hat{u}_{h+\mu}(k, t) \\ \hat{u}_{h+\nu}(k, t) \end{pmatrix} + \widehat{K}_{1,3,h} \begin{pmatrix} \hat{u}_h(k, t) \\ \hat{u}_{h+\mu}(k, t) \\ \hat{u}_{h+\nu}(k, t) \end{pmatrix} = 0$$

$$(2.16) \quad \widehat{M}_{1,3,h} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{2} \end{bmatrix}$$

$$(2.17) \quad \widehat{K}_{1,3,h}(k) = \frac{2}{h^2} \begin{bmatrix} 26 - \cos hk & \frac{-5c_1 e^{ikh\mu} + 5c_2 e^{-ikh\nu}}{4} & \frac{-5c_1 e^{-ikh\mu} + 5c_2 e^{ikh\nu}}{4} \\ \frac{-5c_1 e^{-ikh\mu} + 5c_2 e^{ikh\nu}}{4} & 25 & \frac{-25e^{i\frac{\sqrt{5}}{5}hk}}{2} \\ \frac{-5c_1 e^{ikh\mu} + 5c_2 e^{-ikh\nu}}{4} & \frac{-25e^{-i\frac{\sqrt{5}}{5}hk}}{2} & 25 \end{bmatrix}$$

où nous avons posé :

$$c_1 = 5 + 3\sqrt{5} \quad c_2 = -5 + 3\sqrt{5}$$

De plus, on a les conditions initiales :

$$\hat{u}_h(k, 0) = \hat{u}_{h+\mu}(k, 0) = \hat{u}_{h+\nu}(k, 0) = \hat{u}_0(k)$$

$$\frac{\partial \hat{u}_h}{\partial t}(k, 0) = \frac{\partial \hat{u}_{h+\mu}}{\partial t}(k, 0) = \frac{\partial \hat{u}_{h+\nu}}{\partial t}(k, 0) = \hat{u}_1(k)$$

On notera que  $\widehat{M}_{1,3,h}$  est symétrique et que  $\widehat{K}_{1,3,h}$  est hermitienne (i.e  ${}^t\widehat{K}_{1,3,h} = \overline{\widehat{K}_{1,3,h}}$ ). Pour exprimer la solution de (2.15), il nous faut diagonaliser le système et donc introduire les solutions du problème de valeurs propres :

$$\widehat{N}_{1,3,h}(k)U = \lambda U$$

$$\text{avec } \widehat{N}_{1,3,h}(k) = \widehat{M}_{1,3,h}^{-1} \widehat{K}_{1,3,h}(k)$$

Nous désignons par  $\lambda_h^1(k)$ ,  $\lambda_h^2(k)$  et  $\lambda_h^3(k)$ , les trois valeurs propres positives et par  $W_h^1(k)$ ,  $W_h^2(k)$  et  $W_h^3(k)$  les vecteurs propres associés, normalisés par  $M_{1,3,h}$ ,

c'est à dire :

$$(M_{1,3,h}W_h^i(k), W_h^j(k)) = \delta_{i,j}$$

$(.,.)$  est le produit scalaire dans  $\mathbb{R}^3$ .

Nous avons le :

**Lemme 2.2** *Les vecteurs propres et valeurs propres admettent les développements limités suivants :*

$$\begin{cases}
 \lambda_h^1(k) = k^2 - \frac{h^6 k^8}{302400} + O(h^7) \\
 W_h^1(k) = X_0 + a_5 Y_0 h^5 k^5 + a_7 Y_0 h^7 k^7 + O(h^8)
 \end{cases}$$

$$\begin{cases}
 \lambda_h^2(k) = \frac{30}{h^2} - 5k^2 + \frac{13h^2 k^4}{12} - \frac{137h^4 k^6}{360} + \frac{51259h^6 k^8}{302400} + O(h^7) \\
 W_h^2(k) = Y_0 + \alpha_1 Y_0' h k + \alpha_2 Y_0 h^2 k^2 + \alpha_3 Y_0' h^3 k^3 \\
 \quad + \alpha_4 Y_0 h^4 k^4 + (\alpha_5 Y_0' + \beta_5 X_0) h^5 k^5 + \alpha_6 Y_0 h^6 k^6 + O(h^7)
 \end{cases}$$

$$\begin{cases}
 \lambda_h^3(k) = \frac{60}{h^2} + 5k^2 - \frac{7h^2 k^4}{6} + \frac{23h^4 k^6}{60} - \frac{1899h^6 k^8}{112000} + O(h^7) \\
 W_h^3(k) = Y_0' + \alpha_1 Y_0 h k + \alpha_2 Y_0' h^2 k^2 + \alpha_3 Y_0 h^3 k^3 \\
 \quad + \alpha_4 Y_0' h^4 k^4 + \alpha_5 Y_0 h^5 k^5 + (\alpha_6 Y_0' + \beta_6 X_0) h^6 k^6 + O(h^7)
 \end{cases}$$

$$X_0 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad Y_0 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad Y_0' = \frac{1}{\sqrt{30}} \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$a_5 = \frac{-i\sqrt{6}}{54000} \quad a_7 = -\frac{i\sqrt{6}}{1134000}$$

$$\alpha_1 = \frac{i\sqrt{30}}{15} \quad \alpha_2 = \frac{1}{15} \quad \alpha_3 = \frac{-i\sqrt{30}}{90}$$

$$\alpha_4 = \frac{-11}{450} \quad \alpha_5 = \frac{-841i\sqrt{30}}{270000} \quad \alpha_6 = \frac{437}{45000}$$

$$\beta_5 = \frac{i\sqrt{6}}{54000} \quad \beta_6 = -\frac{i\sqrt{5}}{135000}$$

Nous dirons alors que  $\lambda_h^1$  est la valeur propre physique (en effet  $\lambda_h^1 \rightarrow k^2$ ) ,  $\lambda_h^2$  et  $\lambda_h^3$  sont les valeurs propres parasites (  $\lambda_h^2$  et  $\lambda_h^3 \rightarrow +\infty$  ).

**Démonstration :** voir annexe B.

La solution de (2.15) s'écrit alors :

$$\widehat{U}_h(k, t) = \begin{pmatrix} \hat{u}_h(k, t) \\ \hat{u}_{h+\mu}(k, t) \\ \hat{u}_{h+\nu}(k, t) \end{pmatrix} = \widehat{U}_h^1(k, t)W_h^1(k) + \widehat{U}_h^2(k, t)W_h^2(k) + \widehat{U}_h^3(k, t)W_h^3(k)$$

$$\text{avec } \begin{cases} \widehat{U}_h^j(k, t) = \hat{u}_0(k)\alpha_h^j(k) \cos(\omega_h^j(k)t) + \hat{u}_1(k)\alpha_h^j(k) \frac{\sin(\omega_h^j(k)t)}{\omega_h^j(k)} \quad \forall j = 1..3 \\ \alpha_h^j(k) = ((Id_3, W_h^j(k))) \quad \forall j = 1..3 \\ Id_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \omega_h^j(k) = \sqrt{\lambda_h^j(k)} \quad \forall j = 1..3 \end{cases}$$

On remarquera que  $\widehat{U}_h^1 W_h^1$  correspond à la partie physique, c'est à dire :

$$\widehat{U}_h^1 W_h^1 = \begin{pmatrix} \hat{u}_h^{np} \\ \hat{u}_{h+\mu}^{np} \\ \hat{u}_{h+\nu}^{np} \end{pmatrix}$$

alors que  $\widehat{U}_h^2 W_h^2 + \widehat{U}_h^3 W_h^3$  correspond à la partie parasite, c'est à dire :

$$\widehat{U}_h^2 W_h^2 + \widehat{U}_h^3 W_h^3 = \begin{pmatrix} \hat{u}_h^p \\ \hat{u}_{h+\mu}^p \\ \hat{u}_{h+\nu}^p \end{pmatrix}$$

Estimation de  $\|\tilde{u}_h^{np} - u\|$  ,  $\|\tilde{u}_{h+\mu}^{np} - u\|$  et  $\|\tilde{u}_{h+\nu}^{np} - u\|$

Pour estimer  $\|\tilde{u}_h^{np} - u\|$  ,  $\|\tilde{u}_{h+\mu}^{np} - u\|$  et  $\|\tilde{u}_{h+\nu}^{np} - u\|$  nous utiliserons le théorème de Plancherel :

$$\|\tilde{u}_h^{np} - u\|_{L^2(\mathbb{B})} = \|\hat{u}_h^{np} - \hat{u}\|_{L^2(\mathbb{B})}$$

$$\|\tilde{u}_{h+\mu}^{np} - u\|_{L^2(\mathbb{B})} = \|\hat{u}_{h+\mu}^{np} - \hat{u}\|_{L^2(\mathbb{B})}$$

$$\|\tilde{u}_{h+\nu}^{np} - u\|_{L^2(\mathbb{B})} = \|\hat{u}_{h+\nu}^{np} - \hat{u}\|_{L^2(\mathbb{B})}$$

Posons

$$\begin{pmatrix} \hat{e}_h^{np}(k, t) \\ \hat{e}_{h+\mu}^{np}(k, t) \\ \hat{e}_{h+\nu}^{np}(k, t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{u}_h^{np} - \hat{u} \\ \hat{u}_{h+\mu}^{np} - \hat{u} \\ \hat{u}_{h+\nu}^{np} - \hat{u} \end{pmatrix} = \hat{U}_h^1 W_h^1 - \hat{u} I d_3$$

On obtient alors :

$$\begin{aligned} \|\hat{e}_h^{np}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{B})} &\leq \left( \int_{\mathbb{B}} [\hat{u}_0(k) \cos(\omega_h^1(k)t) + \hat{u}_1(k) \frac{\sin(\omega_h^1(k)t)}{\omega_h^1(k)}]^2 [\alpha_h^1(k)(W_h^1(k))_1 - 1]^2 dk \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad + \left( \int_{\mathbb{B}} \hat{u}_0^2(k) [\cos(\omega_h^1(k)t) - \cos(kt)]^2 dk \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad + \left( \int_{\mathbb{B}} \hat{u}_1^2(k) \left[ \frac{\sin(\omega_h^1(k)t)}{\omega_h^1(k)} - \frac{\sin(kt)}{k} \right]^2 dk \right)^{\frac{1}{2}} \\ \|\hat{e}_{h+\mu}^{np}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{B})} &\leq \left( \int_{\mathbb{B}} [\hat{u}_0(k) \cos(\omega_h^1(k)t) + \hat{u}_1(k) \frac{\sin(\omega_h^1(k)t)}{\omega_h^1(k)}]^2 [\alpha_h^1(k)(W_h^1(k))_2 - 1]^2 dk \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad + \left( \int_{\mathbb{B}} \hat{u}_0^2(k) [\cos(\omega_h^1(k)t) - \cos(kt)]^2 dk \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad + \left( \int_{\mathbb{B}} \hat{u}_1^2(k) \left[ \frac{\sin(\omega_h^1(k)t)}{\omega_h^1(k)} - \frac{\sin(kt)}{k} \right]^2 dk \right)^{\frac{1}{2}} \\ \|\hat{e}_{h+\nu}^{np}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{B})} &\leq \left( \int_{\mathbb{B}} [\hat{u}_0(k) \cos(\omega_h^1(k)t) + \hat{u}_1(k) \frac{\sin(\omega_h^1(k)t)}{\omega_h^1(k)}]^2 [\alpha_h^1(k)(W_h^1(k))_3 - 1]^2 dk \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad + \left( \int_{\mathbb{B}} \hat{u}_0^2(k) [\cos(\omega_h^1(k)t) - \cos(kt)]^2 dk \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad + \left( \int_{\mathbb{B}} \hat{u}_1^2(k) \left[ \frac{\sin(\omega_h^1(k)t)}{\omega_h^1(k)} - \frac{\sin(kt)}{k} \right]^2 dk \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

En procédant comme au théorème 1, nous avons les estimation :

$$\begin{cases} |\cos(\omega_h^1(k)t) - \cos(kt)| \leq Ch^6 k^7 t \\ \left| \frac{\sin(\omega_h^1(k)t)}{\omega_h^1(k)} - \frac{\sin(kt)}{k} \right| \leq Ch^6 k^6 t \end{cases}$$

Par ailleurs :

$$(2.18) \quad \begin{cases} \left| \hat{u}_0(k) \cos(\omega_h^i(k)t) + \hat{u}_1(k) \frac{\sin(\omega_h^i(k)t)}{\omega_h^i(k)} \right| \leq |\hat{u}_0(k)| + |\hat{u}_1(k)|t \quad \forall i = 1..3 \\ |(\alpha_h^1(k)W_h^1(k) - Id_2)_1| \leq Ch^6 k^6 \\ |(\alpha_h^1(k)W_h^1(k) - Id_2)_2| \leq Ch^5 k^5 \\ |(\alpha_h^1(k)W_h^1(k) - Id_2)_3| \leq Ch^5 k^5 \end{cases}$$

Reportant ces estimations dans  $\|\hat{e}_h^{np}(\cdot, t)\|$ , nous obtenons :

$$\begin{aligned} \|\hat{e}_h^{np}(\cdot, t)\| &\leq Ch^6 \left[ \left( \int_{\mathbb{H}} k^{12} |\hat{u}_0(k)|^2 dk \right)^{\frac{1}{2}} + t \left( \int_{\mathbb{H}} k^{12} |\hat{u}_1(k)|^2 dk \right)^{\frac{1}{2}} \right. \\ &\quad \left. + t \left( \int_{\mathbb{H}} k^{14} |\hat{u}_0(k)|^2 dk \right)^{\frac{1}{2}} + t \left( \int_{\mathbb{H}} k^{12} |\hat{u}_1(k)|^2 dk \right)^{\frac{1}{2}} \right] \end{aligned}$$

Soit par Plancherel :

$$\|\hat{e}_h^{np}(\cdot, t)\| \leq Ch^6 \left\{ \left\| \frac{\partial^6 u_0}{\partial x^6} \right\| + t \left\| \frac{\partial^7 u_0}{\partial x^7} \right\| + 2t \left\| \frac{\partial^6 u_1}{\partial x^6} \right\| \right\}$$

En reportant de la même façon ces estimations dans  $\|\hat{e}_{h+\mu}^{np}(\cdot, t)\|$  et dans  $\|\hat{e}_{h+\nu}^{np}(\cdot, t)\|$ , nous obtenons :

$$\begin{aligned} \|\hat{e}_{h+\mu}^{np}(\cdot, t)\| &\leq Ch^5 \left\{ h \left\| \frac{\partial^6 u_0}{\partial x^6} \right\| + t \left\| \frac{\partial^7 u_0}{\partial x^7} \right\| + t(1+h) \left\| \frac{\partial^6 u_1}{\partial x^6} \right\| \right\} \\ \|\hat{e}_{h+\nu}^{np}(\cdot, t)\| &\leq Ch^5 \left\{ h \left\| \frac{\partial^6 u_0}{\partial x^6} \right\| + t \left\| \frac{\partial^7 u_0}{\partial x^7} \right\| + t(1+h) \left\| \frac{\partial^6 u_1}{\partial x^6} \right\| \right\} \end{aligned}$$

Estimation de  $\|\tilde{u}_h^p\|$ , de  $\|\tilde{u}_{h+\mu}^p\|$  et de  $\|\tilde{u}_{h+\nu}^p\|$

Pour estimer  $\|\tilde{u}_h^p\|$ ,  $\|\tilde{u}_{h+\mu}^p\|$  et  $\|\tilde{u}_{h+\nu}^p\|$ , nous utiliserons encore le théorème de Plancherel:

$$\|\tilde{u}_h^p\| = \|\hat{u}_h^p\|$$

$$\|\tilde{u}_{h+\mu}^p\| = \|\hat{u}_{h+\mu}^p\|$$

$$\|\tilde{u}_{h+\nu}^p\| = \|\hat{u}_{h+\nu}^p\|$$

Posons

$$\begin{pmatrix} \hat{e}_h^p(k, t) \\ \hat{e}_{h+\mu}^p(k, t) \\ \hat{e}_{h+\nu}^p(k, t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{u}_h^p \\ \hat{u}_{h+\mu}^p \\ \hat{u}_{h+\nu}^p \end{pmatrix} = \hat{U}_h^2 W_h^2 + \hat{U}_h^3 W_h^3$$

On obtient alors :

$$\begin{aligned} \|\hat{e}_h^p(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{B})} &\leq \left( \int_{\mathbb{B}} [\hat{u}_0(k) \cos(\omega_h^2(k)t) + \hat{u}_1(k) \frac{\sin(\omega_h^2(k)t)}{\omega_h^2(k)}]^2 |(\alpha_h^2(k) W_h^2(k))_1|^2 dk \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad + \left( \int_{\mathbb{B}} [\hat{u}_0(k) \cos(\omega_h^3(k)t) + \hat{u}_1(k) \frac{\sin(\omega_h^3(k)t)}{\omega_h^3(k)}]^2 |(\alpha_h^3(k) W_h^3(k))_1|^2 dk \right)^{\frac{1}{2}} \\ \|\hat{e}_{h+\mu}^p(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{B})} &\leq \left( \int_{\mathbb{B}} [\hat{u}_0(k) \cos(\omega_h^2(k)t) + \hat{u}_1(k) \frac{\sin(\omega_h^2(k)t)}{\omega_h^2(k)}]^2 |(\alpha_h^2(k) W_h^2(k))_2|^2 dk \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad + \left( \int_{\mathbb{B}} [\hat{u}_0(k) \cos(\omega_h^3(k)t) + \hat{u}_1(k) \frac{\sin(\omega_h^3(k)t)}{\omega_h^3(k)}]^2 |(\alpha_h^3(k) W_h^3(k))_2|^2 dk \right)^{\frac{1}{2}} \\ \|\hat{e}_{h+\nu}^p(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{B})} &\leq \left( \int_{\mathbb{B}} [\hat{u}_0(k) \cos(\omega_h^2(k)t) + \hat{u}_1(k) \frac{\sin(\omega_h^2(k)t)}{\omega_h^2(k)}]^2 |(\alpha_h^2(k) W_h^2(k))_3|^2 dk \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad + \left( \int_{\mathbb{B}} [\hat{u}_0(k) \cos(\omega_h^3(k)t) + \hat{u}_1(k) \frac{\sin(\omega_h^3(k)t)}{\omega_h^3(k)}]^2 |(\alpha_h^3(k) W_h^3(k))_3|^2 dk \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Or nous avons les développements limités suivants :

$$\begin{cases} \alpha_h^2(k) W_2(k) = C_5 h^5 k^5 Y_0 + h^6 k^6 Id_3 + O(h^7) \\ \alpha_h^3(k) W_3(k) = C_6 h^6 k^6 Id_3 + O(h^7) \end{cases}$$



Par conséquent en utilisant le théorème de Plancherel et les majorations données dans (2.18) nous obtenons :

$$\|\hat{e}_h^p(., t)\| \leq Ch^6 \left\{ \left\| \frac{\partial^6 u_0}{\partial x^6} \right\| + t \left\| \frac{\partial^6 u_1}{\partial x^6} \right\| \right\}$$

$$\|\hat{e}_{h+\mu}^p(., t)\| \leq Ch^5 \left\{ \left\| \frac{\partial^6 u_0}{\partial x^6} \right\| + t \left\| \frac{\partial^6 u_1}{\partial x^6} \right\| \right\}$$

$$\|\hat{e}_{h+\nu}^p(., t)\| \leq Ch^5 \left\{ \left\| \frac{\partial^6 u_0}{\partial x^6} \right\| + t \left\| \frac{\partial^6 u_1}{\partial x^6} \right\| \right\}$$

□

## Chapitre 3

# Analyse de la dispersion numérique pour le problème semi-discret

Rappelons qu'une onde plane est définie par :  $u_h(x, t) = \exp i(\omega_h t - kx)$ .

La relation de dispersion est par définition la relation reliant la pulsation  $\omega$  et le nombre d'onde  $k$ , pour que l'équation des ondes soit satisfaite par l'onde plane.

Pour le cas continu, la relation de dispersion est :

$$\omega^2 = k^2$$

Pour le cas discret, rappelons qu'il y a une onde physique et deux ondes parasites pour  $P_3$ .

Nous nous intéressons à la dispersion des ondes physiques. En fait, (d'après le lemme 2.2), les ondes parasites se propagent à des vitesses de phases très grandes (en  $O(h^{-1})$ ), mais leurs amplitudes sont faibles.

La relation de dispersion qui nous intéresse est donc celle des ondes physiques donnée par :

$$\omega_h^2 = \omega^2 = \lambda_h^1(k)$$

On note :

-La vitesse de phase réelle :  $v = \frac{\omega}{k} = c$

-La vitesse de phase discrète :  $v_h = \frac{\omega_h}{k}$

- $K = \frac{kh}{2\pi} = \frac{1}{N}$ , où  $N$  correspond au nombre d'éléments par longueur d'onde.

-La vitesse de phase adimensionnelle : (cf. figure 3.1)

$$\begin{aligned} q_h(K) &= \frac{v_h}{v} = \frac{\omega_h}{\omega} = \frac{\sqrt{\lambda_h'^1(2\pi K)}}{2\pi K} \\ &= 1 - \frac{\pi^4 K^4}{180} + O(K^5) \quad \text{pour } P_2 \\ &= 1 - \frac{\pi^6 K^6}{9450} + O(K^7) \quad \text{pour } P_3 \end{aligned}$$

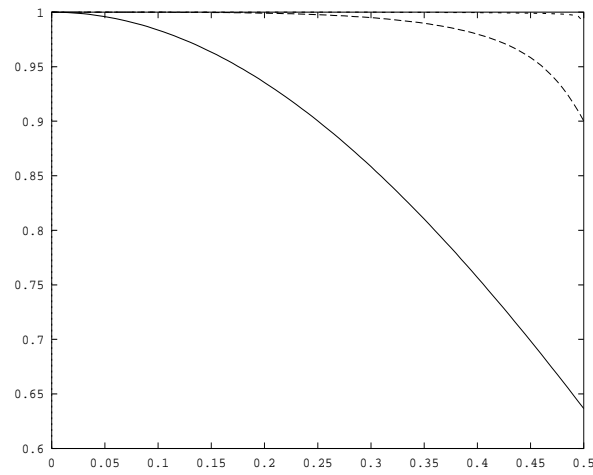


FIG. 3.1 - La courbe supérieure représente la courbe de dispersion  $q_h$  pour  $P_3$ , celle du milieu représente  $q_h$  pour  $P_2$  et la courbe inférieure représente  $q_h$  pour  $P_1$ .

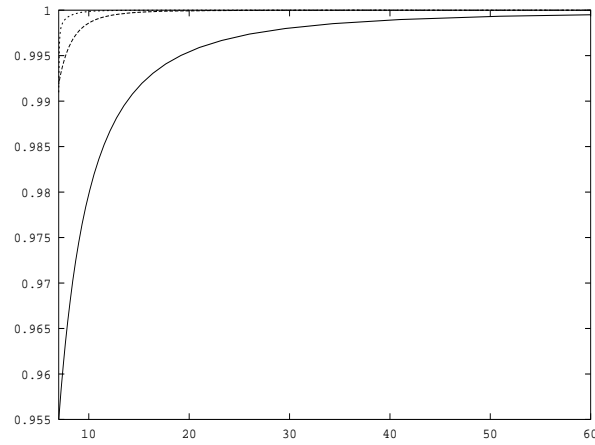


FIG. 3.2 - Courbes 'coût-précision': c'est à dire les courbes précédentes tracées en fonction du nombre de points par longueur d'onde.

## Chapitre 4

# Discrétisation en temps d'ordre 2, 4 et 6

Rappelons le problème semi-discret pour  $P_2$  et  $P_3$  :

$$(4.1) \quad \begin{cases} \frac{d^2 u_h}{dt^2} + N_{1,i,h} u_h = 0 \\ \text{avec } N_{1,i,h} = M_{1,i,h}^{-1} K_{1,i,h} \\ i = 2 \quad \text{pour } P_2 \quad \text{et} \quad i = 3 \quad \text{pour } P_3 \end{cases}$$

### Discrétisation d'ordre 2

A l'ordre 2, nous utilisons (les différences finies centrés) :

$$\frac{d^2 u_h(t^n)}{dt^2} \simeq \frac{u_h^{n+1} - 2u_h^n + u_h^{n-1}}{\Delta t^2}$$

avec  $u_h(t^n) \simeq u_h^n$  et  $t^n = n\Delta t$ , ce qui donne le schéma :

$$\frac{u_h^{n+1} - 2u_h^n + u_h^{n-1}}{\Delta t^2} + N_{1,i,h} u_h^n = 0$$

Pour  $P_2$ , nous avons une erreur de troncature en  $O(h^4) + O(\Delta t^2)$  et pour  $P_3$ , une erreur de troncature en  $O(h^6) + O(\Delta t^2)$  aux nœuds et  $O(h^5) + O(\Delta t^2)$  aux points intérieurs sur des maillages réguliers. Mais si on choisit  $\Delta t$  proportionnel à  $h$ , ce qui est cohérent et habituel pour ce type de problème, la convergence est réduite à celle d'une méthode d'ordre 2. Cette remarque justifie le passage à l'ordre 4.

### Discrétisation d'ordre 4

La façon la plus naturelle d'obtenir une discrétisation à l'ordre 4 serait d'utiliser une méthode de différences finies d'ordre 4 en temps à 5 points. Malheureusement, une telle méthode est instable. Aussi, nous utiliserons l'approche de l'équation modifiée (décrite dans [6] ou [5] par exemple), qui consiste à écrire (par développement de Taylor):

$$\frac{d^2 u_h(t^n)}{dt^2} \simeq \frac{u_h^{n+1} - 2u_h^n + u_h^{n-1}}{\Delta t^2} - \frac{\Delta t^2}{12} \frac{d^4 u_h(t^n)}{dt^4} + O(\Delta t^4)$$

Soit grâce à l'équation des ondes :

$$\frac{d^2 u_h(t^n)}{dt^2} \simeq \frac{u_h^{n+1} - 2u_h^n + u_h^{n-1}}{\Delta t^2} - \frac{\Delta t^2}{12} \Delta^2 u_h(t^n) + O(\Delta t^4)$$

En différences finies, pour la discrétisation en espace, il suffit d'utiliser une discrétisation d'ordre 2 pour le bilaplacien. Ici, nous ne pouvons pas écrire le bilaplacien et le discrétiser ensuite comme pour les différences finies. Car une telle discrétisation ne peut se faire qu'avec des éléments finis appartenant  $H^2(\mathbb{R})$  (éléments finis d'Hermite), ce qui n'est pas le cas des éléments finis de Lagrange. C'est pourquoi, nous allons appliquer l'approche de l'équation modifiée à l'équation semi-discrète (4.1); nous écrivons :

$$\frac{d^2 u_h(t^n)}{dt^2} \simeq \frac{u_h^{n+1} - 2u_h^n + u_h^{n-1}}{\Delta t^2} - \frac{\Delta t^2}{12} N_{1,i,h}^2 u_h^n + O(\Delta t^4)$$

Ceci donne le schéma :

$$\frac{u_h^{n+1} - 2u_h^n + u_h^{n-1}}{\Delta t^2} + N_{1,i,h} [u_h^n - \frac{\Delta t^2}{12} N_{1,i,h} u_h^n] = 0$$

#### Discrétisation d'ordre 6

Pour  $P_3$ , comme on a observé, sur des maillages réguliers, une superconvergence en  $O(h^6)$  aux nœuds du maillage, il est naturel de s'intéresser aux schémas d'ordre 6 en temps qui consistent à écrire (par développement de Taylor) :

$$\frac{d^2 u_h(t^n)}{dt^2} \simeq \frac{u_h^{n+1} - 2u_h^n + u_h^{n-1}}{\Delta t^2} - \frac{\Delta t^2}{12} \frac{d^4 u_h(t^n)}{dt^4} + \frac{\Delta t^4}{360} \frac{d^6 u_h(t^n)}{dt^6} + O(\Delta t^6)$$

Par un procédé semblable à l'approximation d'ordre 4, nous obtenons le schéma:

$$\frac{u_h^{n+1} - 2u_h^n + u_h^{n-1}}{\Delta t^2} + N_{1,3,h} \{u_h^n - \frac{\Delta t^2}{12} N_{1,3,h} [u_h^n - \frac{\Delta t^2}{30} N_{1,3,h} u_h^n]\} = 0$$

Du point de vue temps calcul, il est intéressant de remarquer que :

-1 calcul à l'ordre 4 correspond à 2 calculs à l'ordre 2 en temps.

-1 calcul à l'ordre 6 correspond à 3 calculs à l'ordre 2 en temps.

Mais l'on verra par la suite que ceci n'est pas toujours un handicap. En effet on peut réduire le temps de calcul, notamment grâce à la valeur du coefficient de stabilité de chacun des schémas.

## 4.1 Analyse de la stabilité

En assimilant  $u_h$  et  $\tilde{u}_h$  le schéma discrétisé est de la forme :

$$(4.2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{u_h^{n+1} - 2u_h^n + u_h^{n-1}}{\Delta t^2} + S_{1,i,h}(\Delta t)u_h^n = 0 \\ \text{avec } \left\{ \begin{array}{l} S_{1,i,h}(\Delta t) = N_{1,i,h} \quad \text{pour l'ordre 2} \quad (P_2 \text{ et } P_3) \\ S_{1,i,h}(\Delta t) = N_{1,i,h} \left[ Id - \frac{\Delta t^2}{12} N_{1,i,h} \right] \quad \text{pour l'ordre 4} \quad (P_2 \text{ et } P_3) \\ S_{1,3,h}(\Delta t) = N_{1,3,h} \left\{ Id - \frac{\Delta t^2}{12} N_{1,3,h} \left[ Id - \frac{\Delta t^2}{30} N_{1,3,h} \right] \right\} \quad \text{pour l'ordre 6} \quad (P_3) \end{array} \right. \end{array} \right.$$

$S_{1,i,h}(\Delta t)$  est un opérateur auto-adjoint borné dans  $L^2(\mathbb{R})$ . Donc la stabilité  $L^2$  du schéma est donnée par :

$$S_{1,i,h}(\Delta t) \geq 0 \quad \text{et} \quad \frac{\Delta t^2}{4} \|S_{1,i,h}(\Delta t)\| \leq 1$$

Nous introduisons l'opérateur :

$$\hat{S}_{1,i,h}(\Delta t) = F S_{1,i,h}(\Delta t)$$

où  $F$  désigne la transformée de Fourier en espace.

Le problème est le calcul de  $\|S_{1,i,h}(\Delta t)\| = \|\hat{S}_{1,i,h}(\Delta t)\|$ .

$\hat{S}_{1,i,h}(\Delta t)$  est obtenu en appliquant la transformée de Fourier aux schémas précédents.

$-\widehat{S}_{1,i,h}(\Delta t) = \widehat{N}_{1,i,h}$  pour l'ordre 2 (cf. (2.16) et (2.17)) pour la définition de  $\widehat{N}_{1,i,h}$ .

$-\widehat{S}_{1,i,h}(\Delta t) = \widehat{N}_{1,i,h}[Id - \frac{\Delta t^2}{12}\widehat{N}_{1,i,h}]$  pour l'ordre 4<sup>1</sup>.

$-\widehat{S}_{1,3,h}(\Delta t) = \widehat{N}_{1,3,h}\{Id - \frac{\Delta t^2}{12}\widehat{N}_{1,3,h}[Id - \frac{\Delta t^2}{30}\widehat{N}_{1,3,h}]\}$  pour l'ordre 6.

On obtient alors :

$-\|\widehat{S}_{1,i,h}(\Delta t)\| = \max_{i,K} |\lambda_h^i(K)|$  pour l'ordre 2.

$-\|\widehat{S}_{1,i,h}(\Delta t)\| = \max_{i,K} |\lambda_h^i(K) - \frac{\Delta t^2}{12}(\lambda_h^i)^2(K)|$  pour l'ordre 4.

$-\|\widehat{S}_{1,3,h}(\Delta t)\| = \max_{i,K} |\lambda_h^i(K) - \frac{\Delta t^2}{12}(\lambda_h^i)^2(K) + \frac{\Delta t^4}{360}(\lambda_h^i)^3(K)|$  pour l'ordre 6.

En considérant  $\alpha = \frac{c\Delta t}{h}$  le coefficient de stabilité, on a :

**Théorème 4.1 :**

*La condition de stabilité est :*

$$c \frac{\Delta t}{h} \leq \alpha_i \quad \text{pour } i = 2, 4, 6$$

Pour  $P_2$  :

$$\alpha_2 = \frac{\sqrt{6}}{6} \simeq 0.4082 \quad \text{pour l'ordre 2.}$$

$$\alpha_4 = \frac{\sqrt{2}}{2} \simeq 0.7071 \quad \text{pour l'ordre 4.}$$

Pour  $P_3$  :

$$\alpha_2 = \frac{2}{\sqrt{6(7 + \sqrt{29})}} \simeq 0.232 \quad \text{pour l'ordre 2.}$$

---

<sup>1</sup>. Comme on l'a vu dans le cours sur les différences finies : pour deux opérateurs  $A$  et  $B$ ,  $\widehat{A \circ B} = \widehat{A} \circ \widehat{B}$



$$\alpha_4 = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{6(7 + \sqrt{29})}} \simeq 0.4018 \text{ pour l'ordre } 4.$$

$$\alpha_6 = \frac{\sqrt{2\sqrt[3]{5} - 2\sqrt[3]{25} + 10}}{\sqrt{6(7 + \sqrt{29})}} \simeq 0.319 \text{ pour l'ordre } 6.$$

### Démonstration

Notons  $\lambda_h^{'i}(k) = h^2 \lambda_h^i$ , alors pour  $P_2$ ,  $\alpha_2$  et  $\alpha_4$  dépendent d'une même valeur :

$$\max_{i,K} \lambda_h^{'i}(K) = \lambda_h^{'2}(0) = 24$$

Pour  $P_3$ ,  $\alpha_2$ ,  $\alpha_4$  et  $\alpha_6$  dépendent aussi d'une même valeur :

$$\max_{i,K} \lambda_h^{'i}(K) = \lambda_h^{'3}(0.5) = 6(7 + \sqrt{29})$$

(Nous établissons ces résultats à la fin de la démonstration).

#### Pour l'ordre 2

La stabilité est équivalente à :

$$0 \leq \frac{\alpha^2}{4} \lambda_h^{'i}(K) \leq 1 \quad \forall i, \forall K$$

$$\text{Alors } \alpha \leq \frac{2}{\sqrt{\max_{i,K} \lambda_h^{'i}(K)}}$$

#### Pour l'ordre 4

La stabilité est équivalente à :

$$(4.3) \quad \frac{\alpha^2}{4} (\lambda_h^{'i}(K) - \frac{\alpha^2}{12} (\lambda_h^{'i})^2(K)) \geq 0 \quad \forall i, \forall K$$

$$(4.4) \quad \frac{\alpha^2}{4} (\lambda_h^{'i}(K) - \frac{\alpha^2}{12} (\lambda_h^{'i})^2(K)) \leq 1 \quad \forall i, \forall K$$

L'étude de l'inéquation (4.4) montre que celle ci est toujours vérifiée, on ne s'intéresse alors qu'à l'inéquation (4.3). On obtient :

$$\alpha \leq \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{\max_{i,K} \lambda_h^{'i}(K)}}$$

Pour l'ordre 6

La stabilité est équivalente à :

$$(4.5) \quad \frac{\alpha^2}{4}(\lambda_h^{'i}(K) - \frac{\alpha^2}{12}(\lambda_h^{'i})^2(K) + \frac{\alpha^4}{360}(\lambda_h^{'i})^3(K)) \geq 0 \quad \forall i, \forall K$$

$$(4.6) \quad \frac{\alpha^2}{4}(\lambda_h^{'i}(K) - \frac{\alpha^2}{12}(\lambda_h^{'i})^2(K) + \frac{\alpha^4}{360}(\lambda_h^{'i})^3(K)) \leq 1 \quad \forall i, \forall K$$

L'inéquation (4.5) étant toujours vérifiée, on ne s'intéresse qu'à l'inéquation (4.6). On obtient (grâce au logiciel Maple) :

$$\alpha \leq \frac{\sqrt{2\sqrt[3]{5} - 2\sqrt[3]{25} + 10}}{\sqrt{\max_{i,K} \lambda_h^{'i}(K)}}$$

Calcul de  $\max_{i,K} \lambda_h^{'i}(K)$  pour  $P_2$

---

$$\max_{i,K} \lambda_h^{'i}(K) = \lambda_h^{'2}(0) = 24$$

En effet,

$$\lambda_h^{'1}(K) = 11 + \cos 2\pi K - \sqrt{\cos^2 2\pi K + 70 \cos 2\pi K + 73}$$

L'étude de  $\lambda_h^{'1}$  donne  $\max_K \lambda_h^{'1}(K) = 8$

$$\lambda_h^{'2}(K) = 11 + \cos 2\pi K + \sqrt{\cos^2 2\pi K + 70 \cos 2\pi K + 73}$$

L'étude de  $\lambda_h^{'2}$  donne  $\max_K \lambda_h^{'2}(K) = 24$

Calcul de  $\max_{i,K} \lambda_h^{'i}(K)$  pour  $P_3$

---

$$\max_{i,K} \lambda_h^{'i}(K) = \lambda_h^{'3}(0.5) = 6(7 + \sqrt{29})$$

En effet,

$\lambda_h^{'i}(K)$  est solution du polynôme caractéristique  $P$  défini par :

$$P(x) = -x^3 + (92 - 2 \cos 2\pi K)x^2 - (120 \cos 2\pi K + 1680)x - 3600 \cos 2\pi K + 3600$$

D'où

$$-\lambda_h^{'i}(K)^3 + (92 - 2 \cos 2\pi K) \lambda_h^{'i}(K)^2 - (120 \cos 2\pi K + 1680) \lambda_h^{'i}(K) - 3600 \cos 2\pi K + 3600 = 0 \quad (4.7)$$

Comme on cherche  $\max_{i,K} \lambda_h^{'i}(K)$ , alors  $\frac{d\lambda_h^{'i}(K)}{dK} = 0$ . Donc en dérivant l'équation (4.7), on obtient :

$$(4.8) \quad \sin 2\pi K \underbrace{[\lambda_h^{'i}(K)^2 + 60\lambda_h^{'i}(K) + 1800]}_Q = 0$$

Le polynôme  $Q$  n'ayant pas de solution réelle, alors  $\sin 2\pi K = 0$

Etudions alors plusieurs cas :

i) Si  $K = 0$ , l'équation à résoudre est:

$$\lambda_h^{'i}(0)^3 - 90\lambda_h^{'i}(0)^2 + 1800\lambda_h^{'i}(0) = 0$$

D'où  $\lambda_h^{'1}(0) = 0$ ,  $\lambda_h^{'2}(0) = 30$ ,  $\lambda_h^{'3}(0) = 60$

Donc  $\max_i \lambda_h^{'i}(0) = 60$

ii) Si  $K = 0.5$ , l'équation à résoudre est:

$$\lambda_h^{'i}(0.5)^3 - 94\lambda_h^{'i}(0.5)^2 + 1560\lambda_h^{'i}(0.5) - 7200 = 0$$

Les solutions du polynôme associé sont :  $6(7 - \sqrt{29}) \leq 10 \leq 6(7 + \sqrt{29})$ .

Or  $\lambda_h^{'3}(0.5) = 6(7 + \sqrt{29})$ , par conséquent  $\max_i \lambda_h^{'i}(0.5) = 6(7 + \sqrt{29})$

On conclut que  $\max_{i,K} \lambda_h^{'i}(K) = 6(7 + \sqrt{29})$

## 4.2 Analyse de la dispersion

Comme dans le cas semi-discret, nous ne considérons que la dispersion des ondes non parasites. La relation de dispersion, pour que l'équation (4.2) soit satisfaite pour l'onde plane est :

$$\frac{4}{\Delta t^2} \sin^2\left(\frac{\Delta t}{2} \omega_h\right) = \beta_h$$

avec  $\beta_h$  la valeur propre non parasite de  $\hat{S}_h(\Delta t)$ . On obtient alors :

$$-\beta_h = \lambda_h^1 \text{ pour l'ordre 2 } (P_2 \text{ et } P_3).$$

$$-\beta_h = \lambda_h^1 - \frac{\Delta t^2}{12}(\lambda_h^1)^2 \text{ pour l'ordre 4 } (P_2 \text{ et } P_3).$$

$$-\beta_h = \lambda_h^1 - \frac{\Delta t^2}{12}(\lambda_h^1)^2 + \frac{\Delta t^4}{360}(\lambda_h^1)^3 \text{ pour l'ordre 6 } (P_3).$$

On s'intéresse à la vitesse de phase adimensionnelle, en fonction de deux paramètres :

$$-K = \frac{kh}{2\pi} = \frac{1}{N}$$

$$-\alpha = \frac{c\Delta t}{h}$$

Pour l'ordre 2 en temps, on a :

$$(4.9) \quad q_h = \begin{cases} \frac{1}{\pi\alpha K} \arcsin\left(\frac{\alpha}{2}\sqrt{\lambda_h^1(2\pi K)}\right) & (P_2 \text{ et } P_3) \\ 1 + O(K^2) \end{cases}$$

Pour l'ordre 4 en temps, on a :

$$(4.10) \quad q_h = \begin{cases} \frac{1}{\pi\alpha K} \arcsin\left(\frac{\alpha}{2}\sqrt{(\lambda_h^1 - \frac{\alpha^2}{12}(\lambda_h^1)^2)(2\pi K)}\right) & (P_2 \text{ et } P_3) \\ 1 + O(K^4) \end{cases}$$

Pour l'ordre 6 en temps, on a :

$$(4.11) \quad q_h = \begin{cases} \frac{1}{\pi\alpha K} \arcsin\left(\frac{\alpha}{2}\sqrt{(\lambda_h^1 - \frac{\alpha^2}{12}(\lambda_h^1)^2 + \frac{\alpha^4}{360}(\lambda_h^1)^3)(2\pi K)}\right) & (P_3) \\ 1 + O(K^6) \end{cases}$$

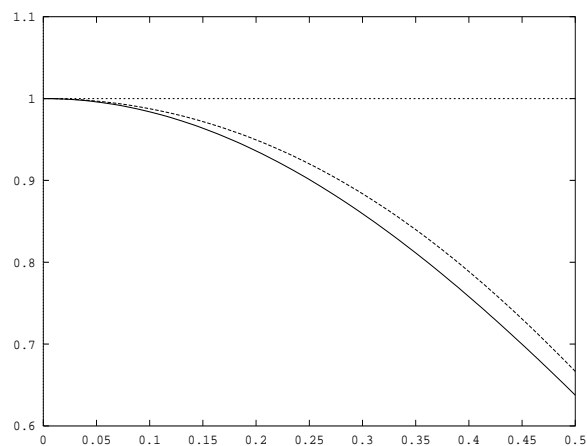


FIG. 4.1 - courbes de dispersion pour  $P_1$  et l'ordre 2 en temps avec  $\alpha = 0.01$  pour la courbe inférieure et croissant jusqu'à 1 pour la courbe supérieure.

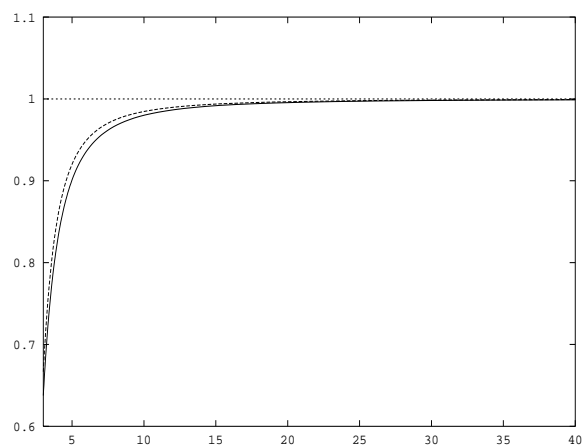


FIG. 4.2 - courbes 'coût-précision' pour  $P_1$  et l'ordre 2 en temps.

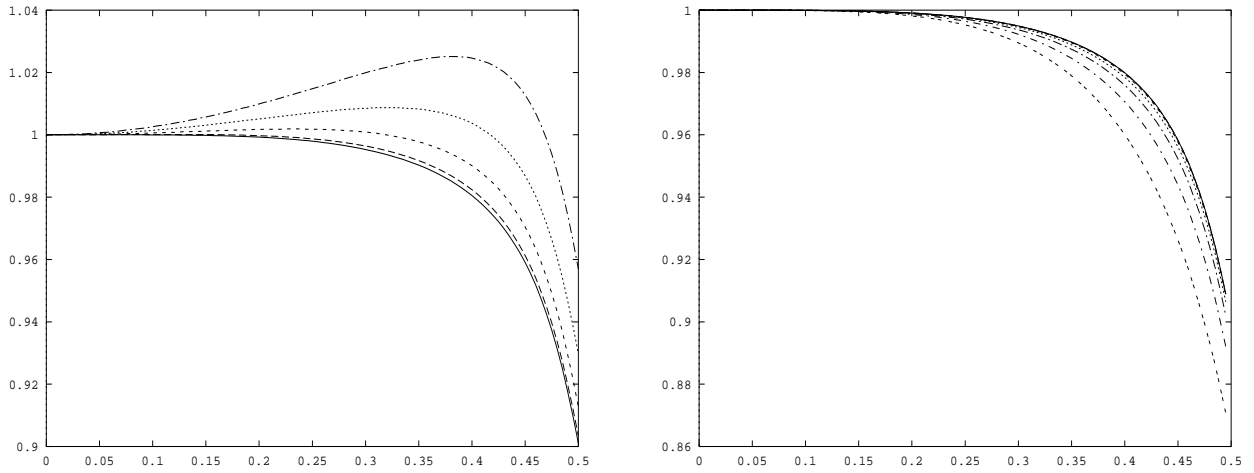


FIG. 4.3 - à gauche : courbes de dispersion pour  $P_2$  et l'ordre 2 en temps avec  $\alpha = 0.05$  pour la courbe inférieure et croissant jusqu'à 0.4 pour la courbe supérieure, à droite : courbes de dispersion pour  $P_2$  et l'ordre 4 en temps avec  $\alpha = 0.7$  pour la courbe inférieure et décroissant jusqu'à 0.1 pour la courbe supérieure.

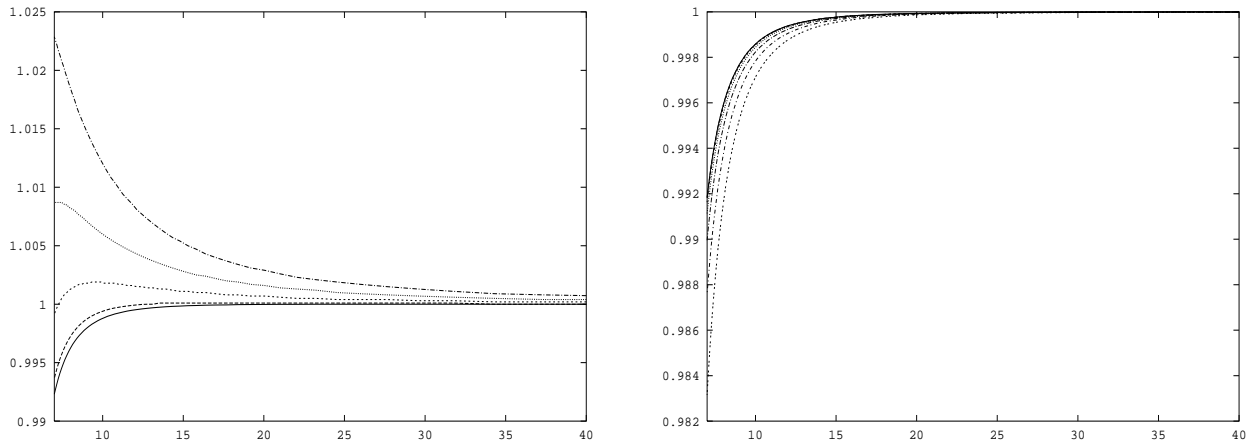


FIG. 4.4 - à gauche : courbes 'coût-précision' pour  $P_2$  et l'ordre 2 en temps, à droite : courbes 'coût-précision' pour  $P_2$  et l'ordre 4 en temps.

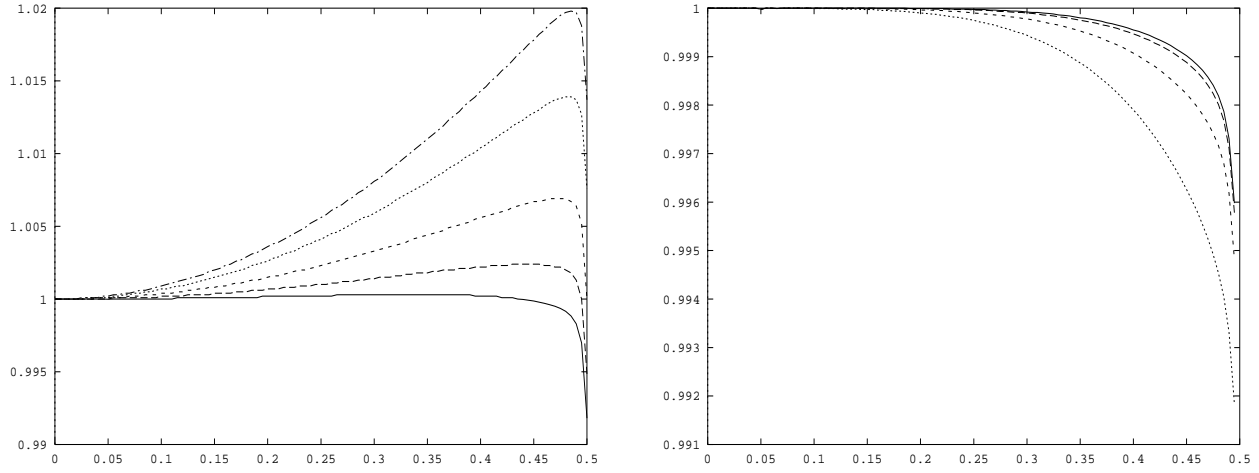


FIG. 4.5 - à gauche : courbes de dispersion pour  $P_3$  et l'ordre 2 en temps avec  $\alpha = 0.05$  pour la courbe inférieure et croissant jusqu'à 0.232 pour la courbe supérieure, à droite : courbes de dispersion pour  $P_3$  et l'ordre 4 en temps avec  $\alpha = 0.4$  pour la courbe inférieure et décroissant jusqu'à 0.1 pour la courbe supérieure.

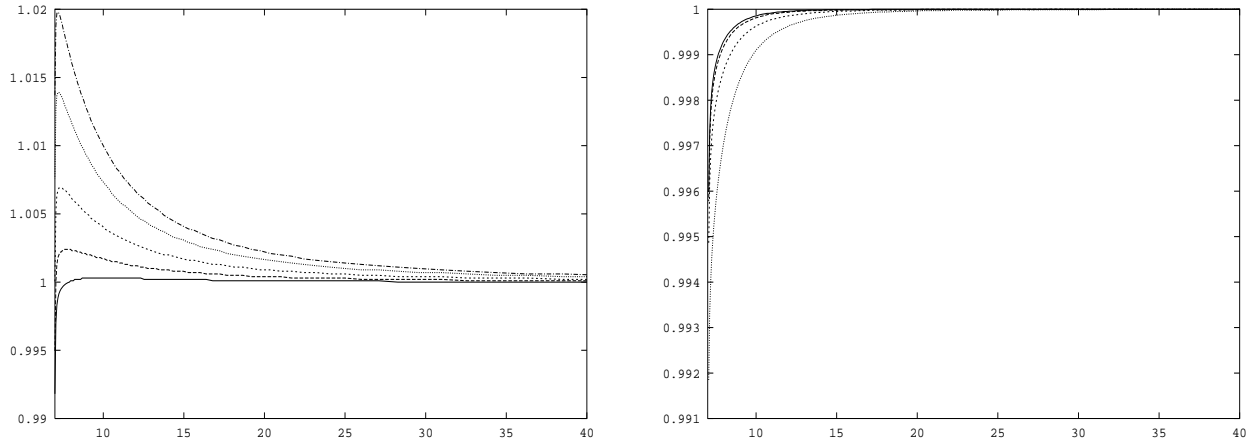


FIG. 4.6 - à gauche : courbes 'coût-précision' pour  $P_3$  et l'ordre 2 en temps, à droite : courbes 'coût-précision' pour  $P_3$  et l'ordre 4 en temps.

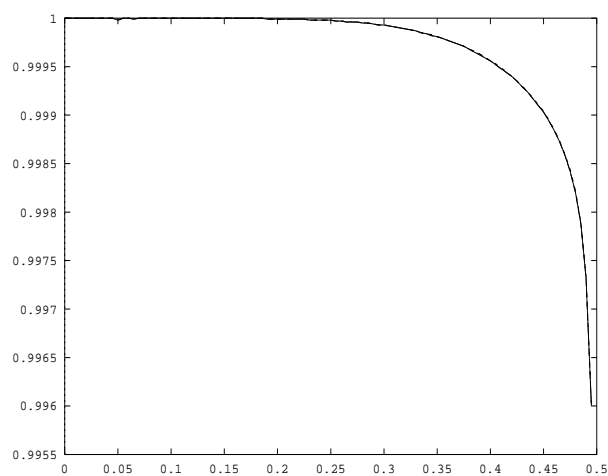


FIG. 4.7 - *Courbe de dispersion pour  $P_3$  et l'ordre 6 en temps (on remarque que les courbes sont confondues).*

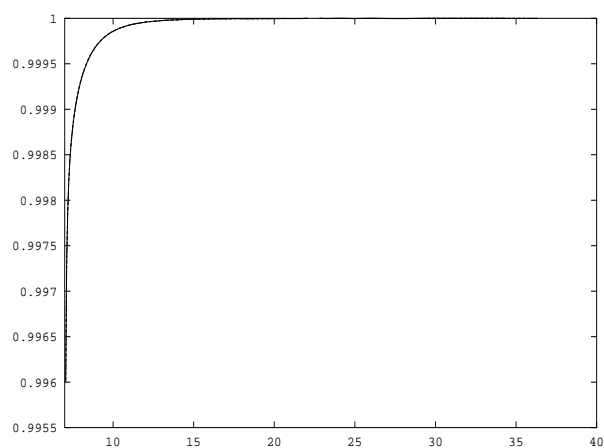


FIG. 4.8 - *Courbe 'coût-précision' pour  $P_3$  et l'ordre 6 en temps.*



Ces courbes (tracées à des échelles différentes) appellent deux remarques :

1- Pour les ordres 4 et 6 en temps, la précision optimale n'est pas obtenue pour  $\alpha_{max}$ , ce qui implique que l'on ne peut pas utiliser le pas de temps maximal pour des maillages grossiers (contrairement aux différences finies centrées d'ordre 4 en temps et en espace, cf. [5]) .

2- Dans le cas des éléments  $P_3$ , pour un nombre de points supérieur à 15, l'erreur varie en fonction de  $\alpha$  entre 0 et  $5 \cdot 10^{-3}$  pour l'ordre 2 en temps, alors que pour l'ordre 4 et l'ordre 6, elle reste inférieure à  $10^{-4}$  (cf. courbes (4.5) et (4.7)). Cependant, les valeurs équivalentes du  $\alpha_{max}$  pour l'ordre 4 et l'ordre 6 en temps, et le nombre de calculs supérieur pour l'ordre 6 montrent que l'ordre 4 en temps donnera un algorithme plus efficace, pour une précision équivalente à celle de l'ordre 6.

# Chapitre 5

## Résultats numériques

### 5.1 Un premier problème modèle

L'équation des ondes :

1- Sur  $\Omega = [0, 12]$

2- Avec second membre

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = f(t) * g(x)$$

$$f(t) \begin{cases} 2(\frac{\pi}{1.31})^2(2(\frac{\pi}{1.31})^2(t - 1.35)^2 - 1) \exp(-(\frac{\pi}{1.31})^2(t - 1.35)^2) & \forall t \in [0, 3.48] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$g(x) = \exp(-7(x - 6)^2)$$

3- Avec conditions aux limites de type Dirichlet homogène

On laisse évoluer la solution pendant 50 secondes. La courbe en pointillés représente la solution exacte, que l'on peut calculer par exemple par la méthode des caractéristiques.

Nous faisons plusieurs types d'expériences sur maillages réguliers (cf. figures 5.3 à 5.10) et sur maillages non réguliers (cf. figures 5.11).

-expériences avec discrétisation en temps d'ordre 2 pour  $P_1$ ,  $P_2$  et  $P_3$ .

-expériences avec discrétisation en temps d'ordre 4 pour  $P_2$  et  $P_3$ .

Pour ces expériences, nous utilisons d'abord des maillages avec 21 points par unité de longueur (i.e 10.5 points par longueur d'onde), puis des maillages plus raffinés de telle façon à avoir une solution "exacte". Nous prenons comme coefficient de stabilité  $\alpha = 0.38$  (proche de  $\alpha_4$ ) pour le schéma d'ordre 4 en temps avec condensation de masse  $P_3$  et leurs équivalents pour les autres schémas, c'est à dire :

$\alpha = 0.19$  pour le schéma d'ordre 2 en temps avec condensation de masse  $P_3$

$\alpha = 0.285$  pour le schéma d'ordre 2 en temps avec condensation de masse  $P_2$

$\alpha = 0.57$  pour le schéma d'ordre 4 en temps avec condensation de masse  $P_3$

Il faut cependant remarquer que pour le schéma  $P_3$  classique, on ne peut pas prendre  $\alpha = 0.19$  mais seulement  $\alpha = 0.15$  (ce qui devrait donner une précision supérieure à ce schéma en comparaison au schéma d'ordre 2 en temps avec condensation de masse  $P_3$ ).

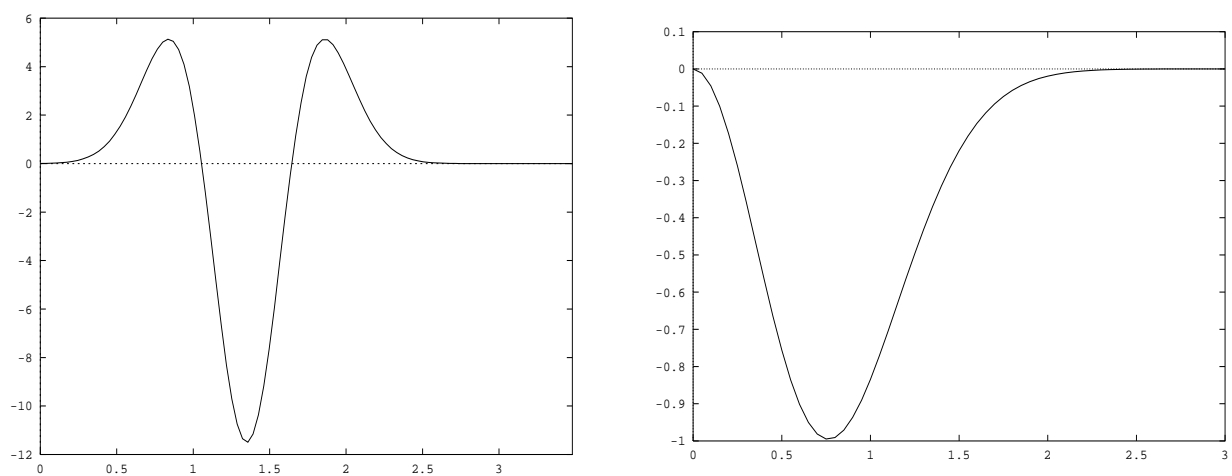


FIG. 5.1 - (à gauche) :  $f(t)$ , (à droite) :  $\hat{f}$  qui est de longueur d'onde  $1/2$

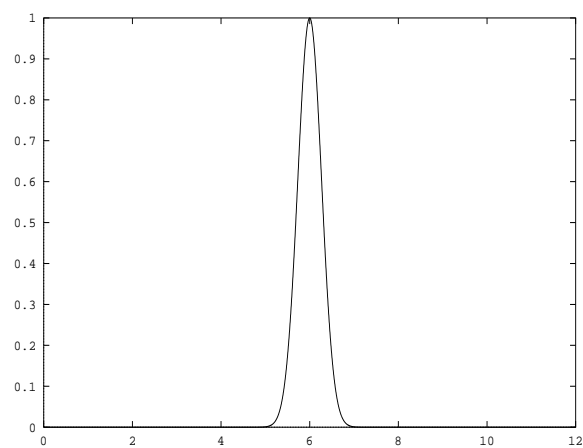


FIG. 5.2 -  $g(x)$

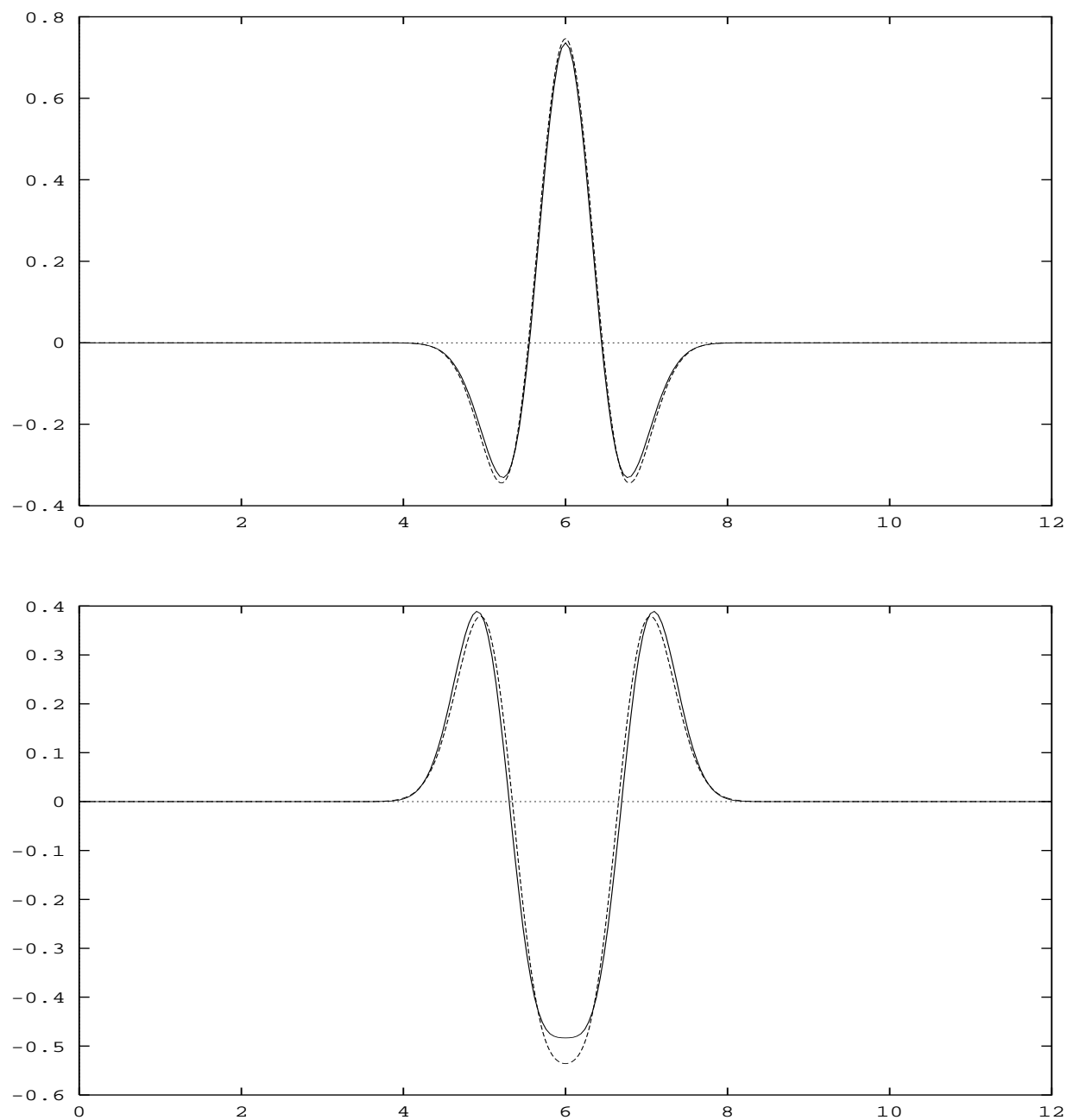


FIG. 5.3 - schéma d'ordre 2 en temps,  $P_3$  classique,  $\alpha = 0.15$ ,  $N = 7$ , (en haut) :  $T=25s$ , (en bas) :  $T=50s$

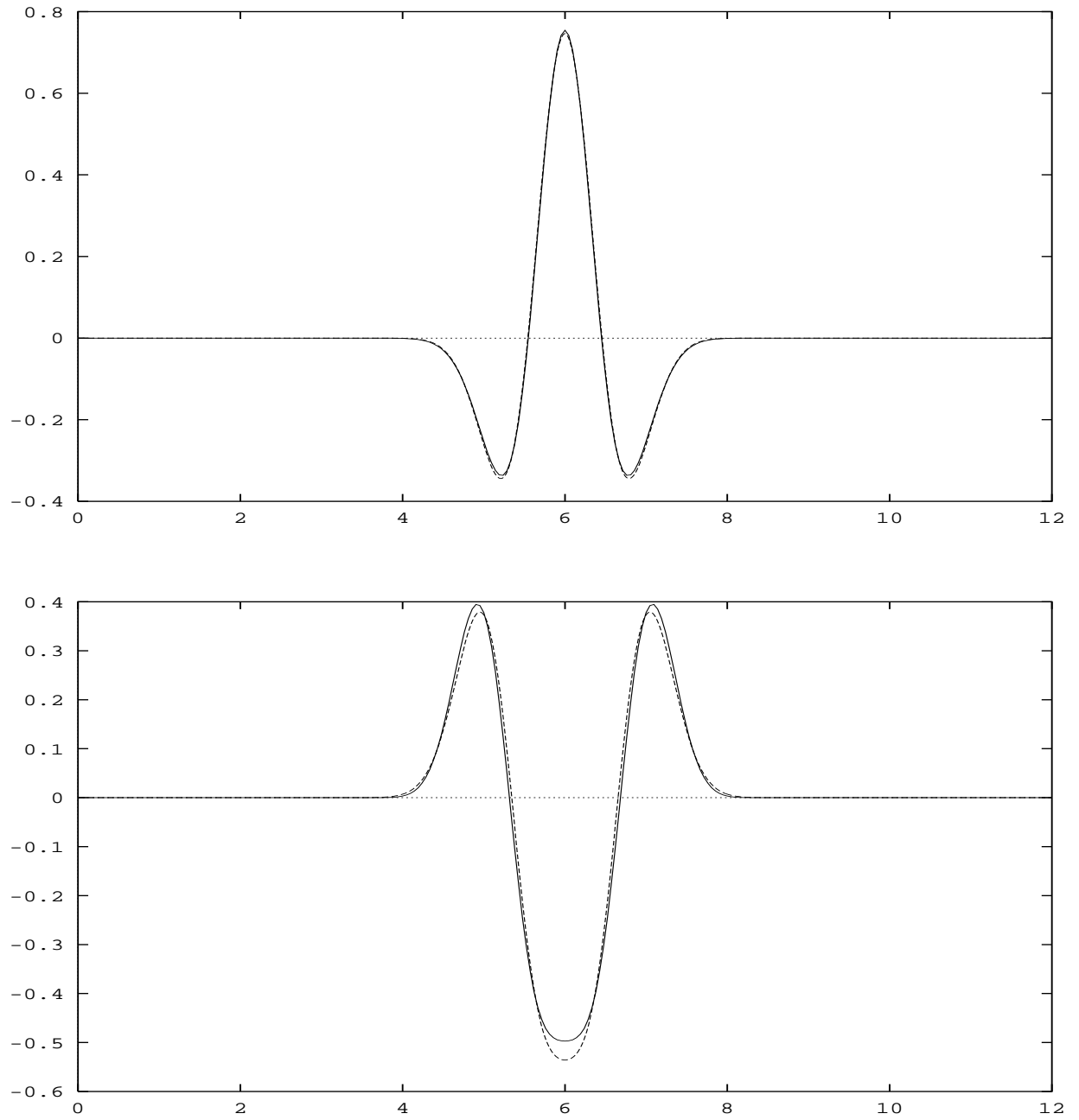


FIG. 5.4 - schéma d'ordre 2 en temps avec condensation de masse  $P_2$ ,  $\alpha = 0.285$ ,  $N = 10.5$ , (en haut) :  $T=25s$ , (en bas) :  $T = 50s$

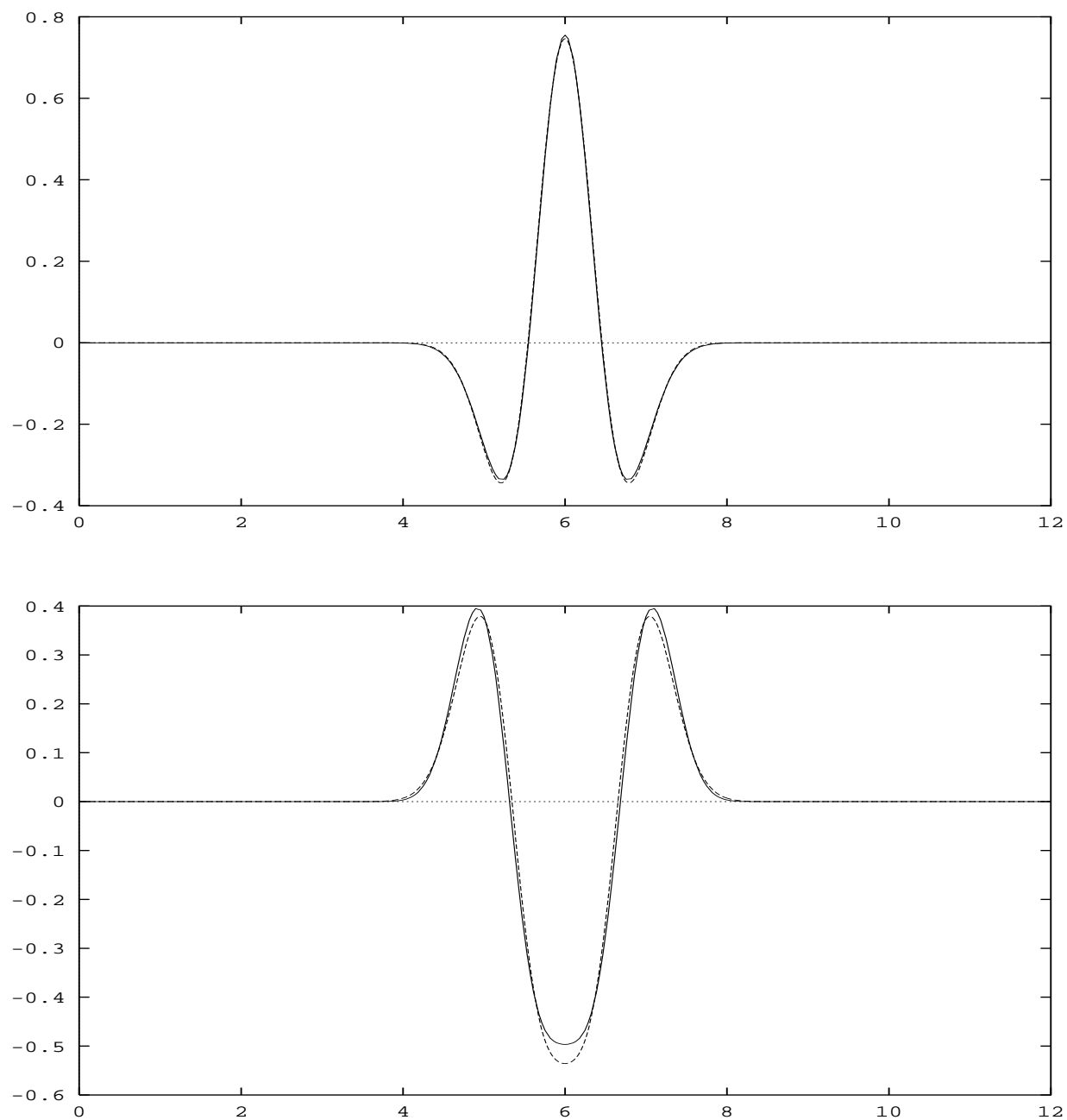


FIG. 5.5 - schéma d'ordre 2 en temps avec condensation de masse  $P_3$ ,  $\alpha = 0.19$ ,  $N = 7$ , (en haut) :  $T=25s$ , (en bas) :  $T=50s$

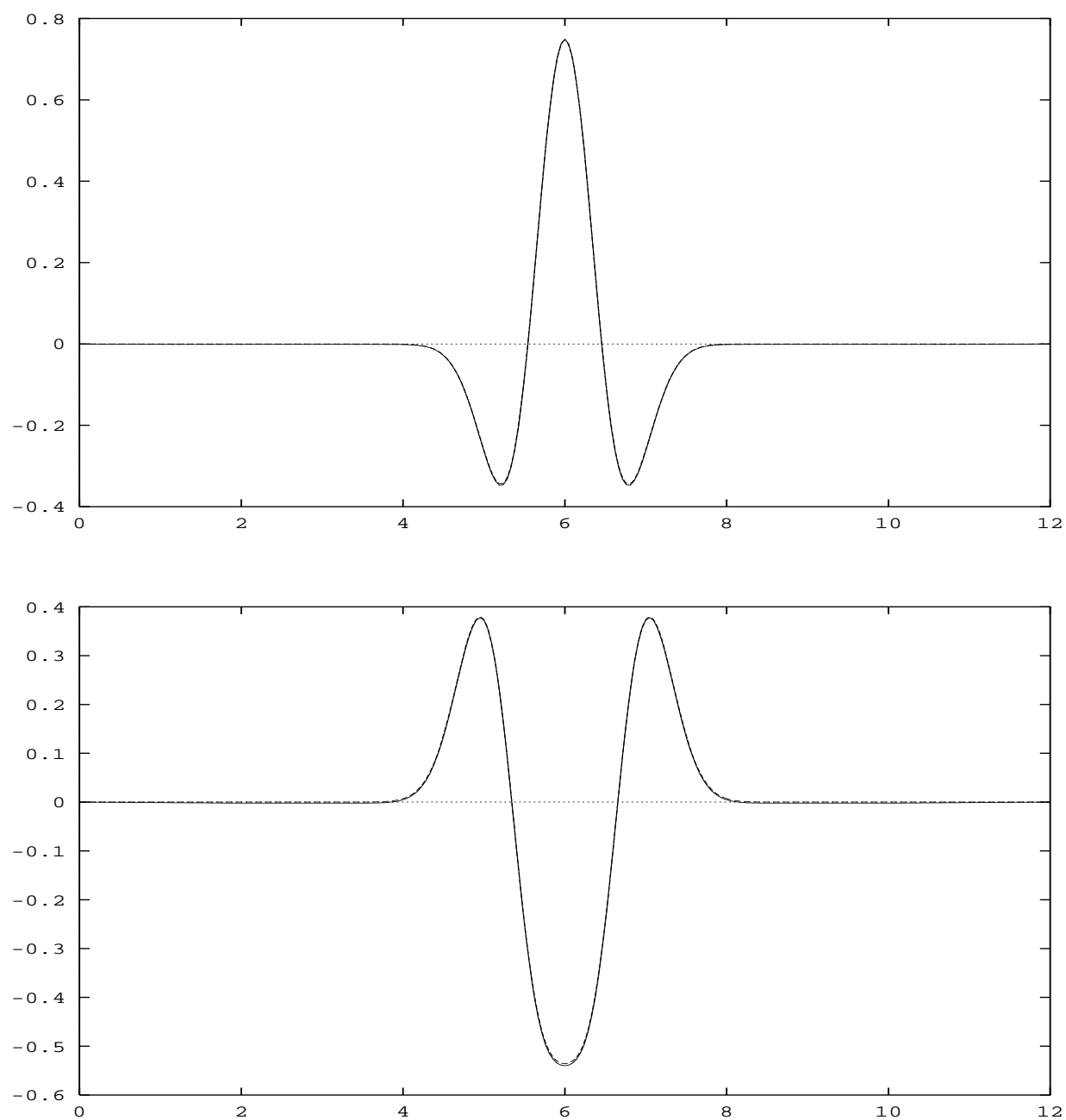


FIG. 5.6 - schéma d'ordre 4 en temps avec condensation de masse  $P_2$ ,  $\alpha = 0.57$ ,  $N = 10.5$ , (en haut) :  $T=25s$ , (en bas) :  $T=50s$



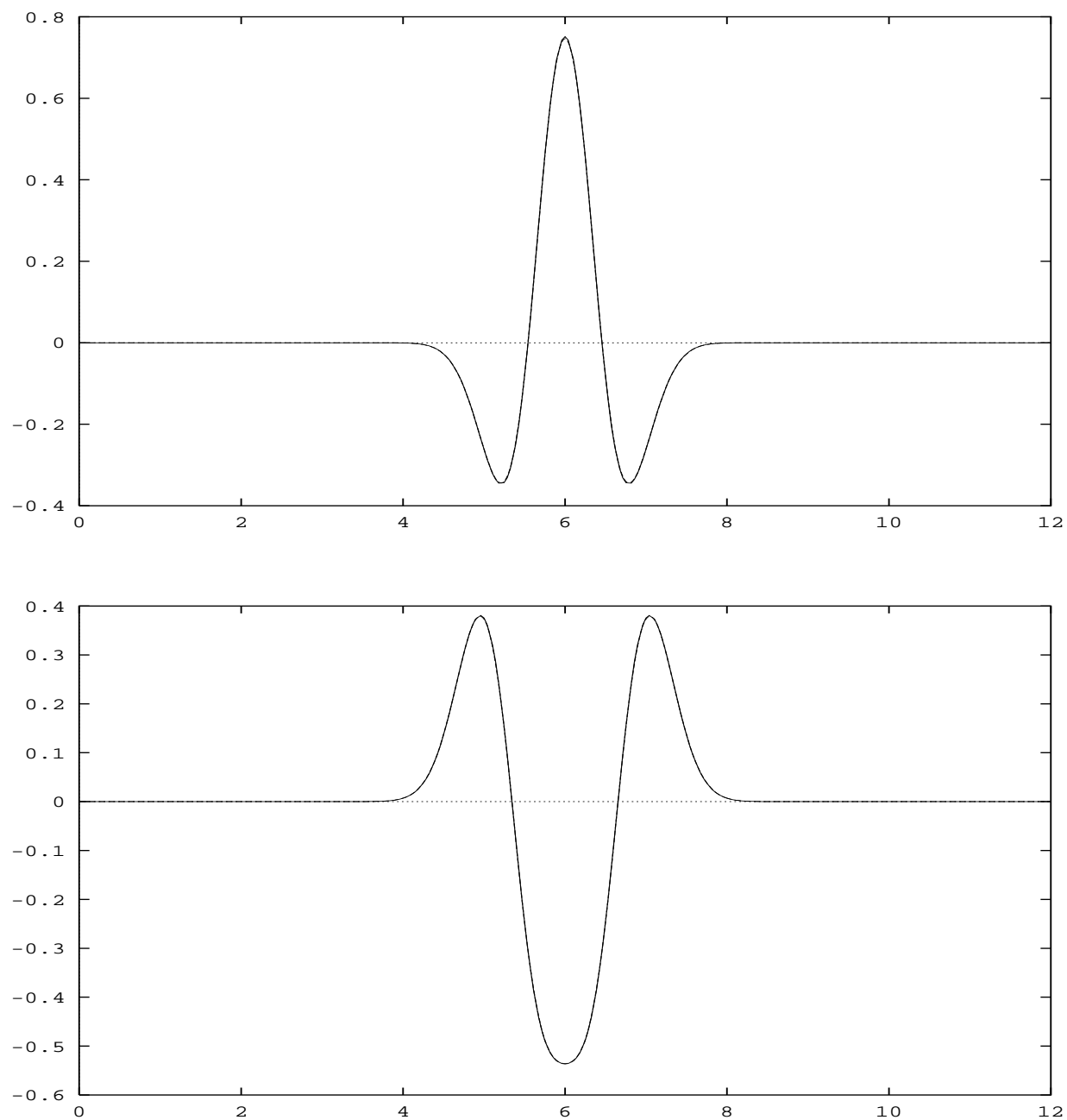


FIG. 5.7 - schéma d'ordre 4 en temps avec condensation de masse  $P_3$ ,  $\alpha = 0.38$ ,  $N = 7$ , (en haut) :  $T=25s$ , (en bas) :  $T=50s$

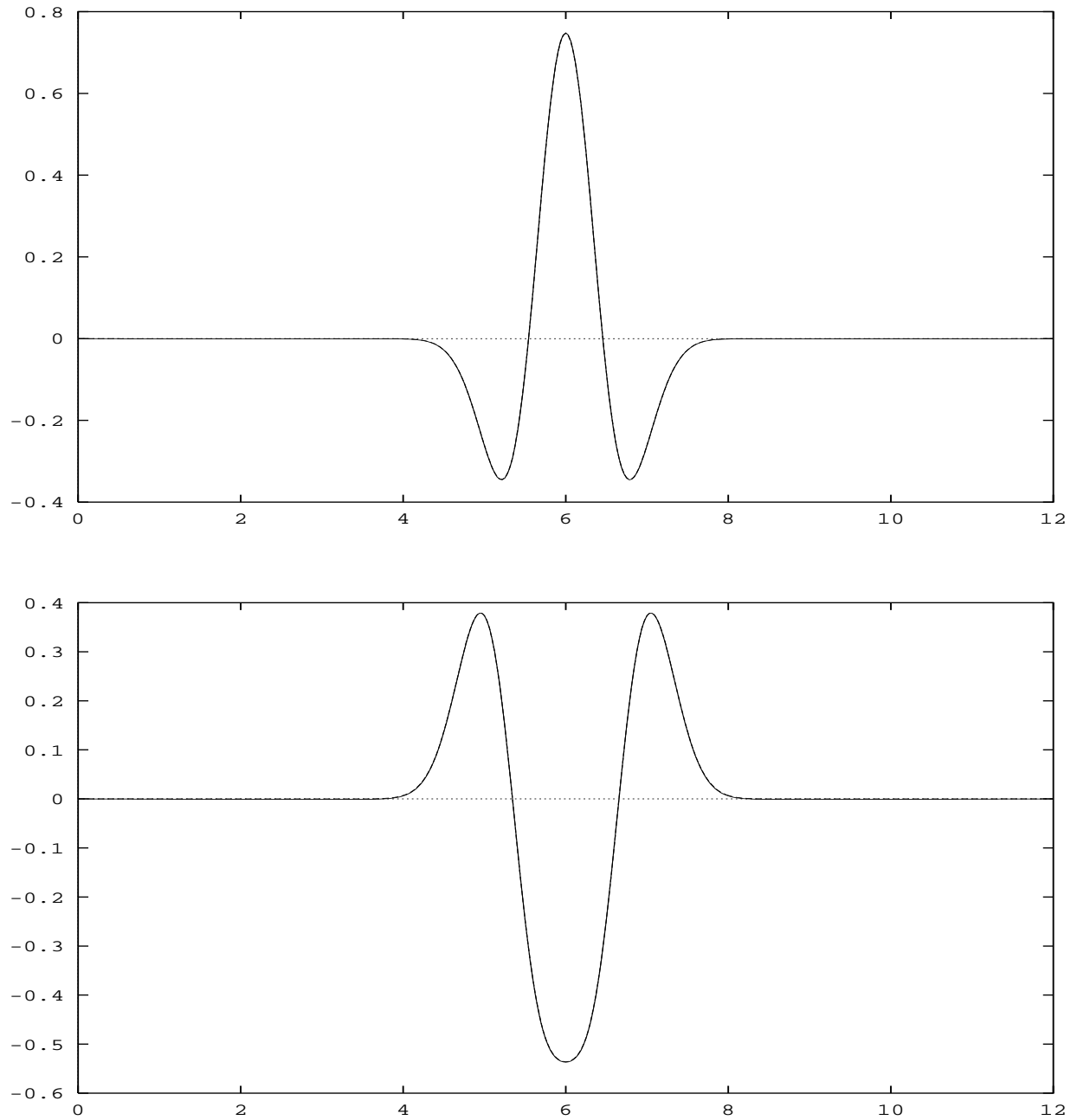


FIG. 5.8 - schéma d'ordre 4 en temps avec condensation de masse  $P_2$ ,  $\alpha = 0.57$ ,  $N = 16$ , (en haut) :  $T=25s$ , (en bas) :  $T=50s$

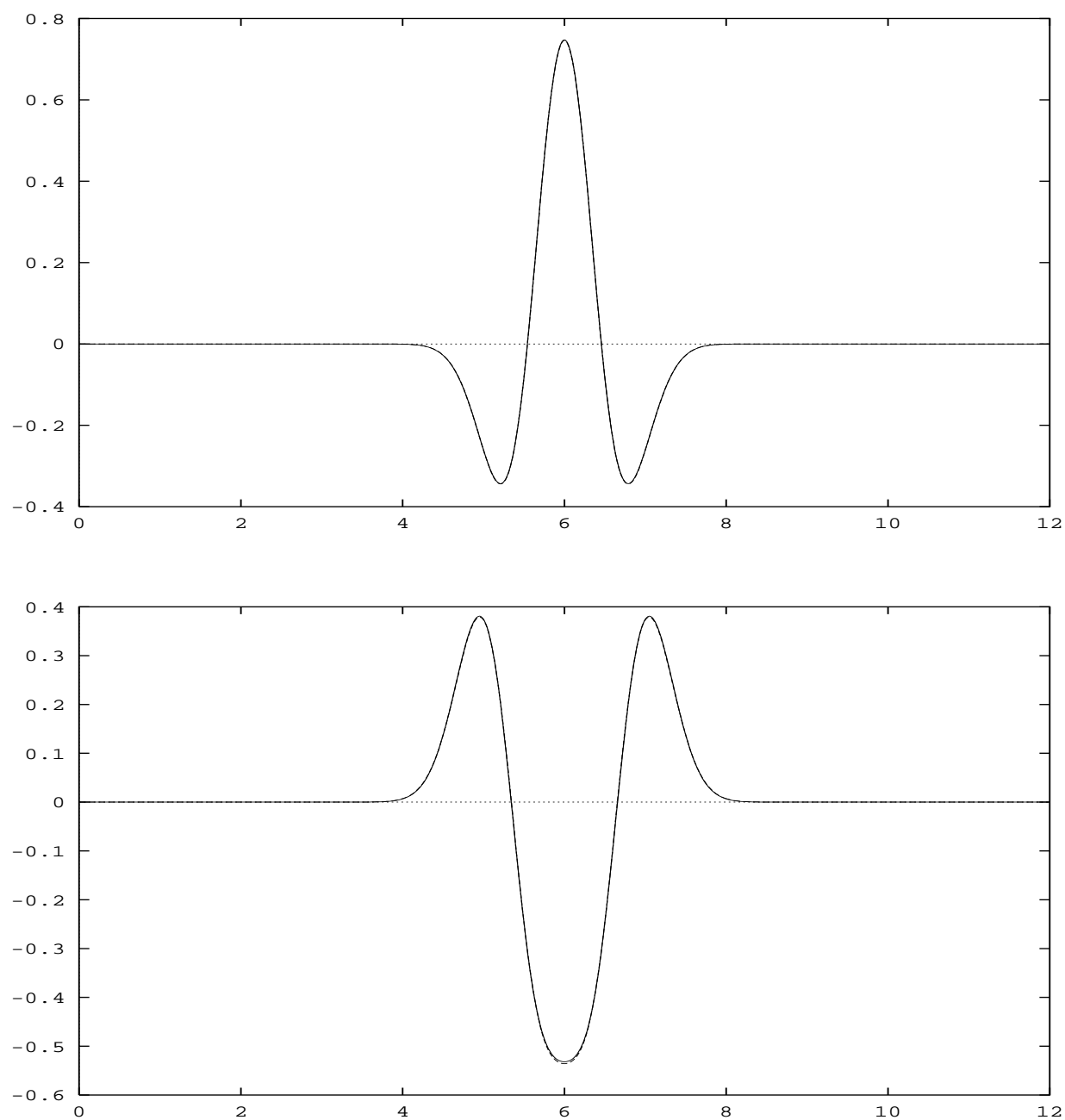


FIG. 5.9 - schéma d'ordre 2 en temps avec condensation de masse  $P_3$ ,  $\alpha = 0.19$ ,  $N = 25$ , (en haut) :  $T=25s$ , (en bas) :  $T=50s$

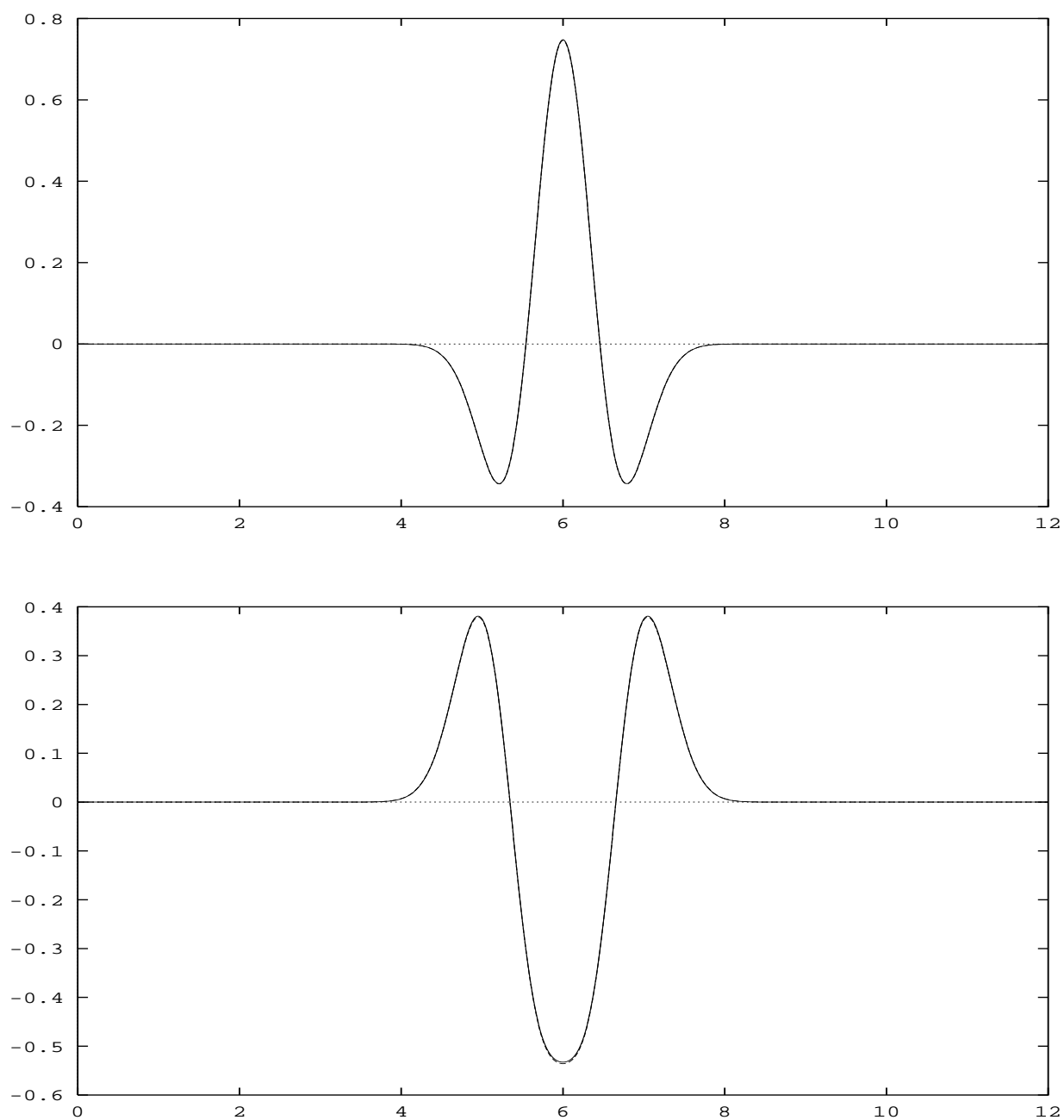


FIG. 5.10 - schéma d'ordre 2 en temps avec condensation de masse  $P_2$ ,  $\alpha = 0.285$ ,  $N = 50$ , (en haut) :  $T=25s$ , (en bas) :  $T=50s$

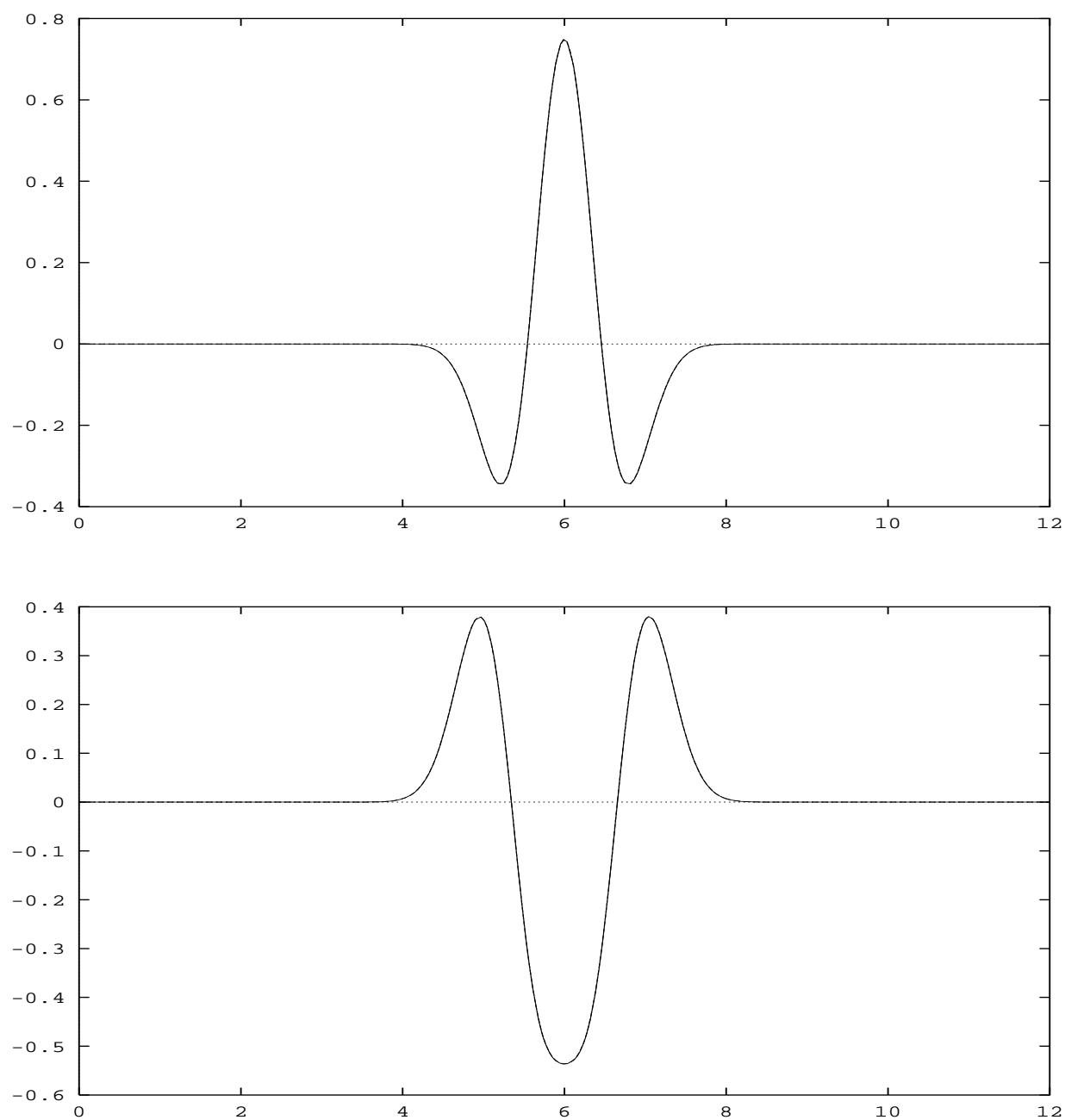


FIG. 5.11 - schéma d'ordre 4 en temps avec condensation de masse  $P_3$  sur maillage non régulier,  $\alpha = 0.38$ ,  $N = 7$ , (en haut) :  $T=25s$ , (en bas) :  $T=50s$

## 5.2 Un second problème modèle

L'équation des ondes :

1- Sur  $\Omega = [0, 12]$

2- Sans un second membre :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = 0$$

3- Avec pour condition initiale (cf. figure 5.12) :

$$u_0 \begin{cases} (1 - (x - 6)^2/4)^3 & \text{sur } [4, 8] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

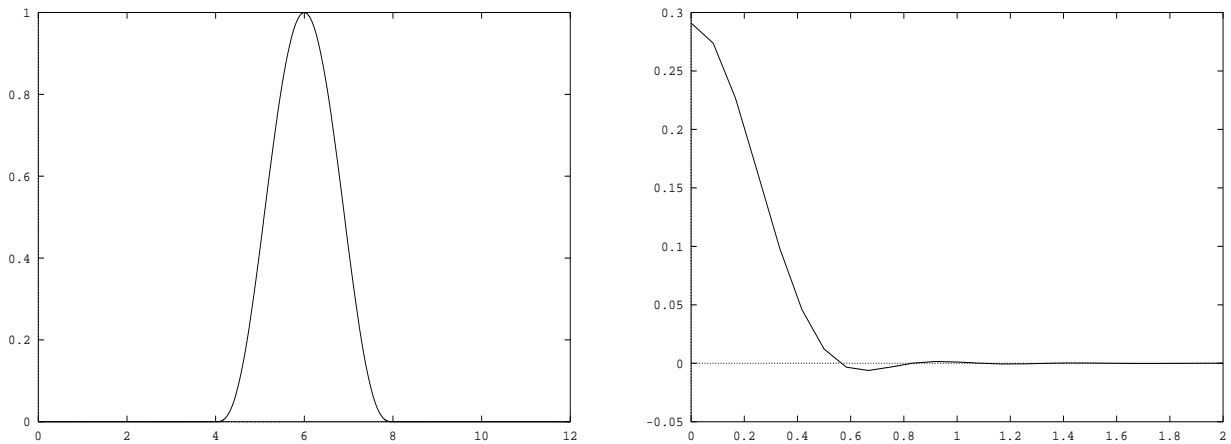


FIG. 5.12 - à gauche :  $u_0(x)$  et à droite :  $\widehat{u_0}(1/\lambda)$  qui est de longueur d'onde 1

4- Avec conditions aux limites de type Dirichlet homogène

On laisse évoluer la solution pendant 50 secondes. La courbe en pointillés représente la solution exacte.

Nous faisons les mêmes expériences que dans le premier modèle, (mais cette fois ci avec tout d'abord 15 points par longueur d'onde) sur maillages réguliers (cf. figures 5.13 à 5.20) et sur maillages non réguliers (cf. figures 5.21).

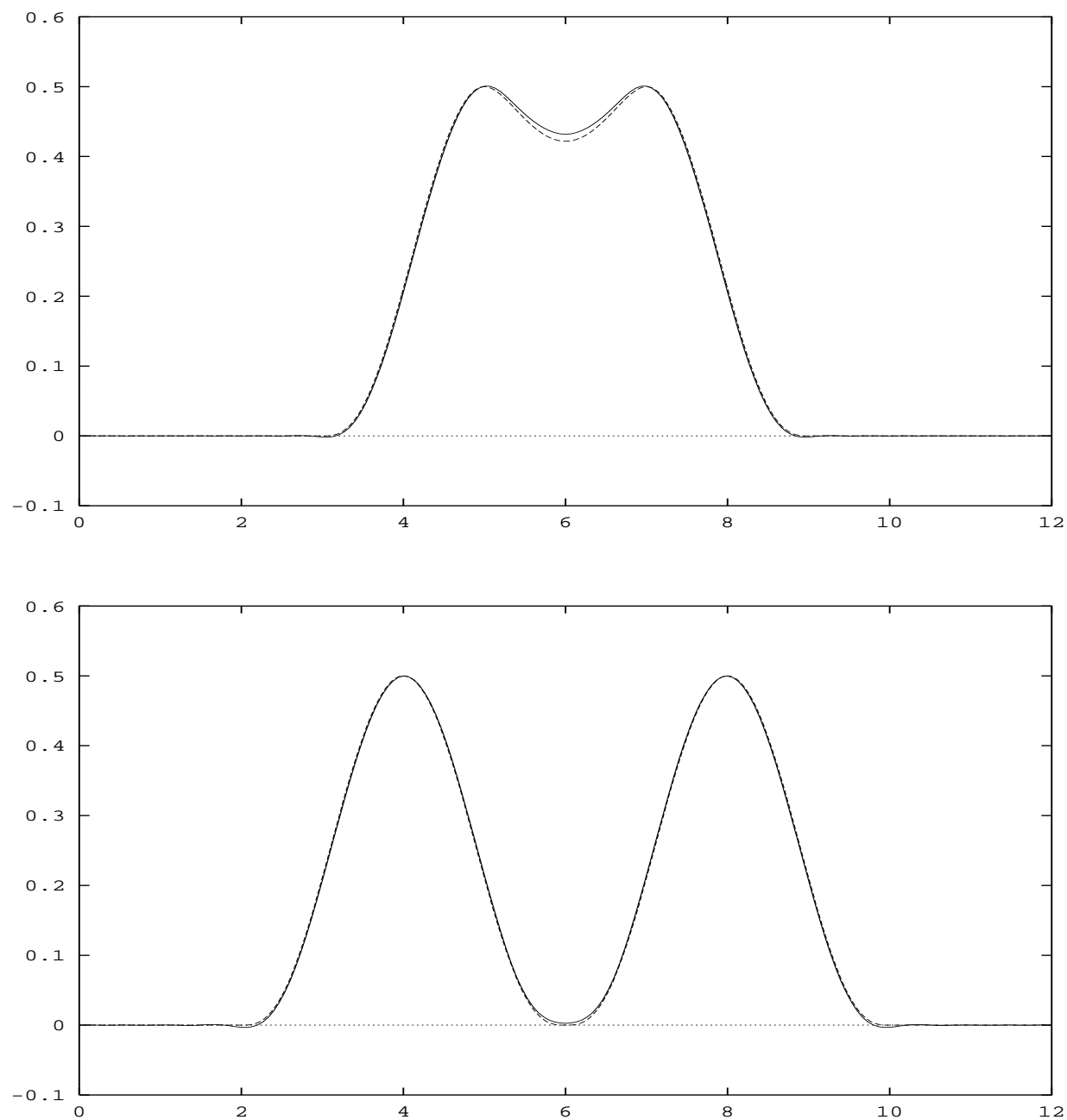


FIG. 5.13 - schéma d'ordre 2 en temps,  $P_3$  classique,  $\alpha = 0.15$ ,  $N = 5$ , (en haut) :  $T=25s$ , (en bas) :  $T=50s$

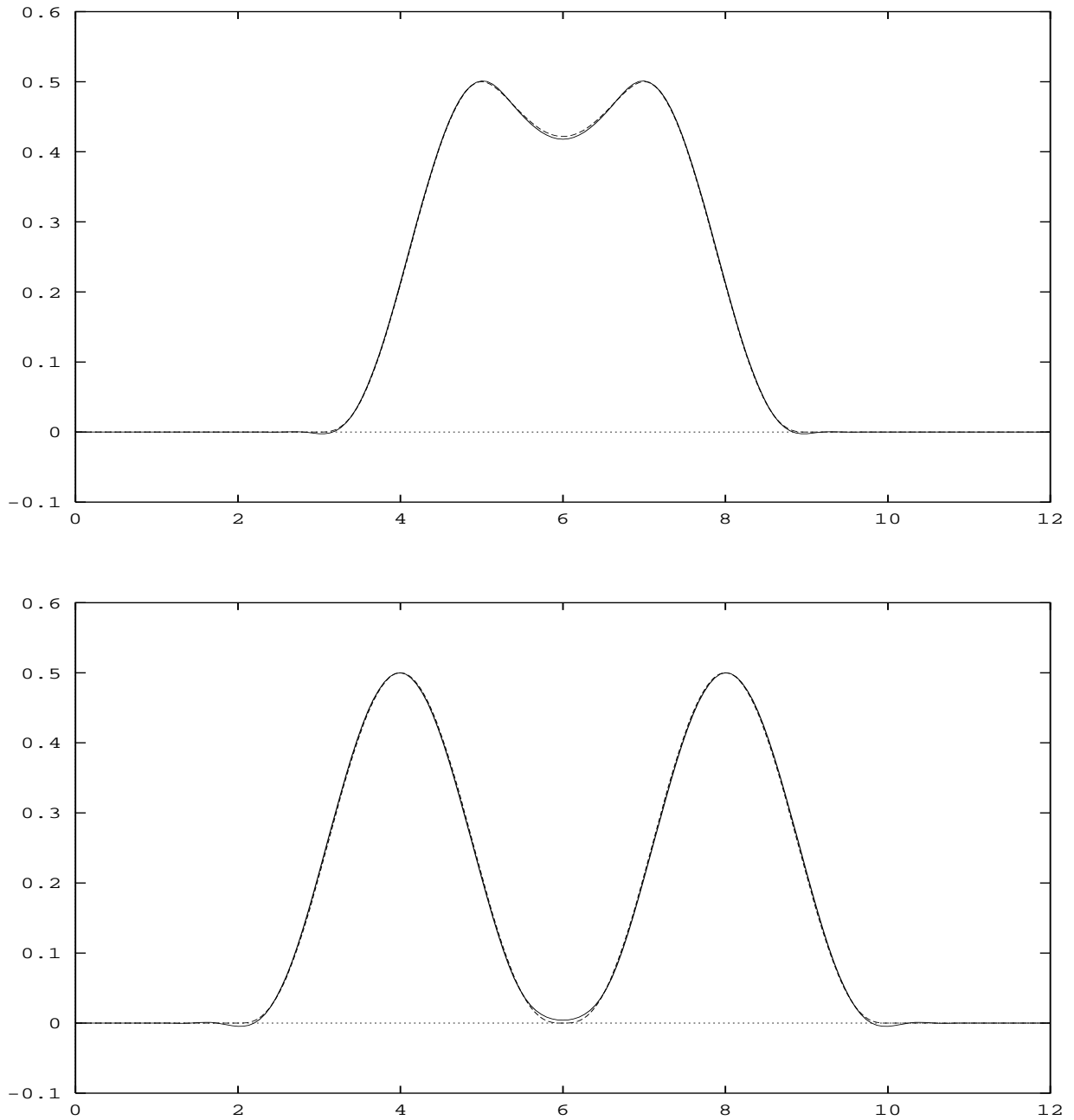


FIG. 5.14 - schéma d'ordre 2 en temps avec condensation de masse  $P_2$ ,  $\alpha = 0.285$ ,  $N = 7.5$ , (en haut) :  $T=25s$ , (en bas) :  $T = 50s$



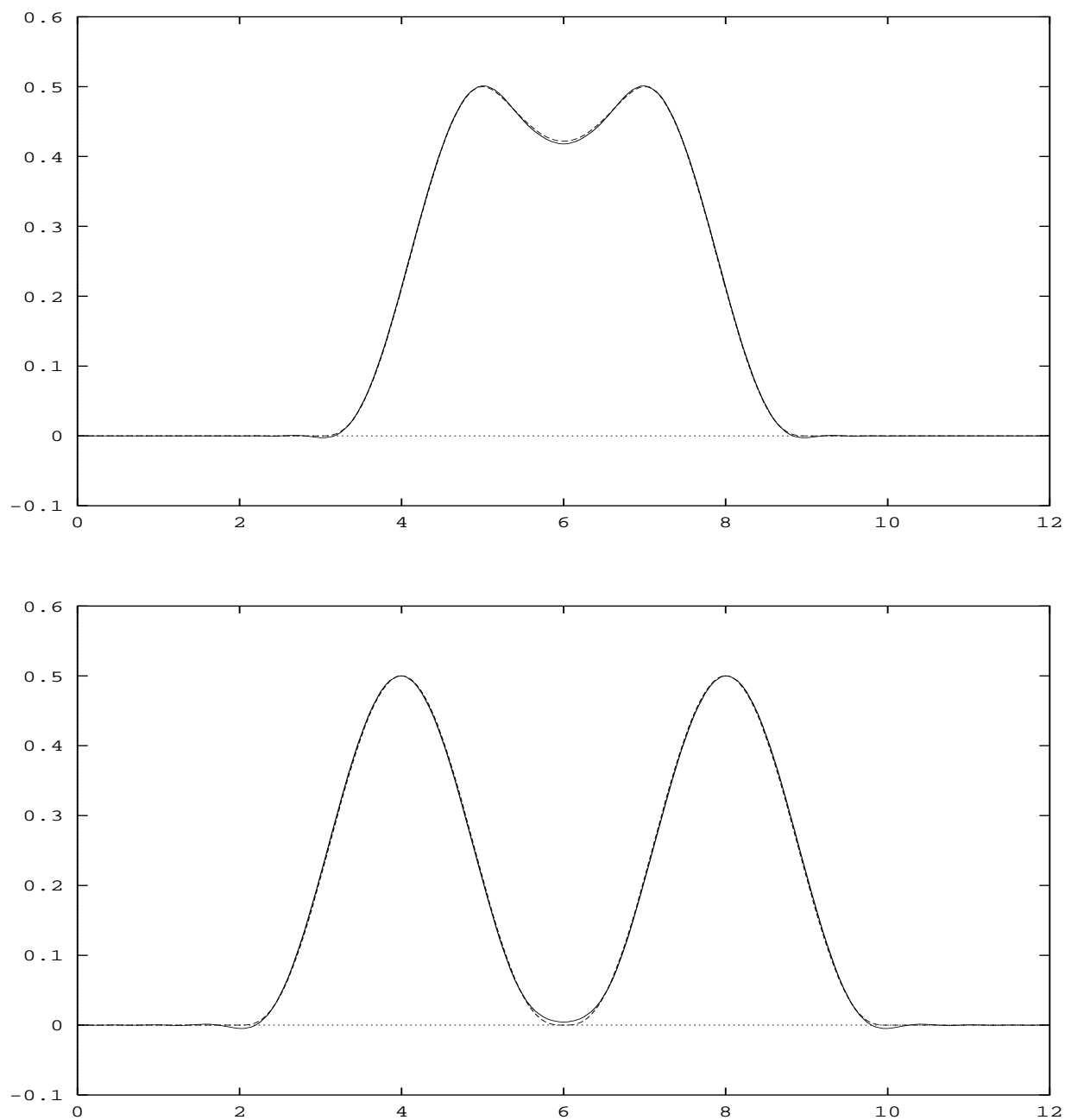


FIG. 5.15 - schéma d'ordre 2 en temps avec condensation de masse  $P_3$ ,  $\alpha = 0.19$ ,  $N = 5$ , (en haut) :  $T=25s$ , (en bas) :  $T=50s$

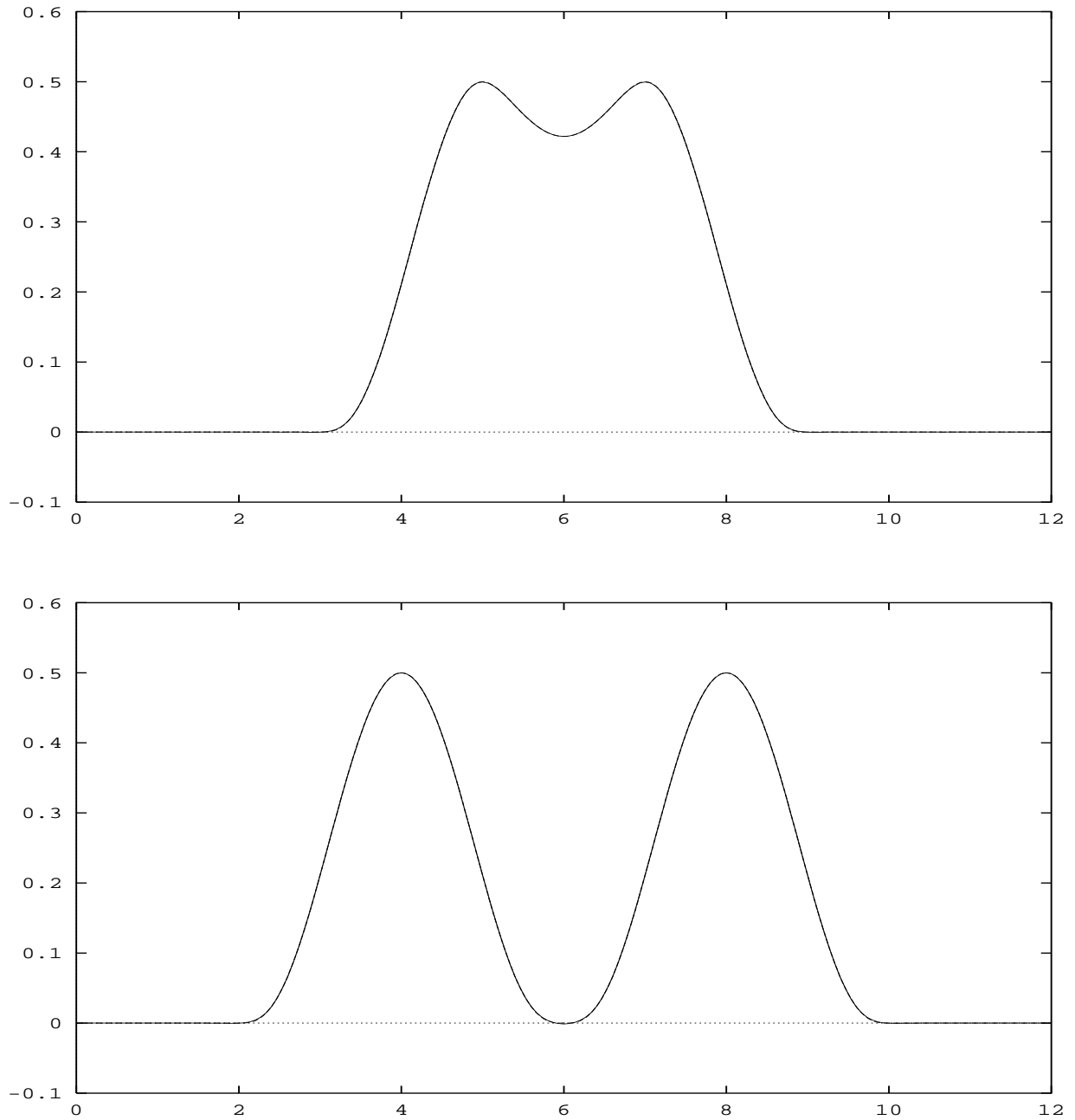


FIG. 5.16 - schéma d'ordre 4 en temps avec condensation de masse  $P_2$ ,  $\alpha = 0.57$ ,  $N = 7.5$ , (en haut) :  $T=25s$ , (en bas) :  $T=50s$

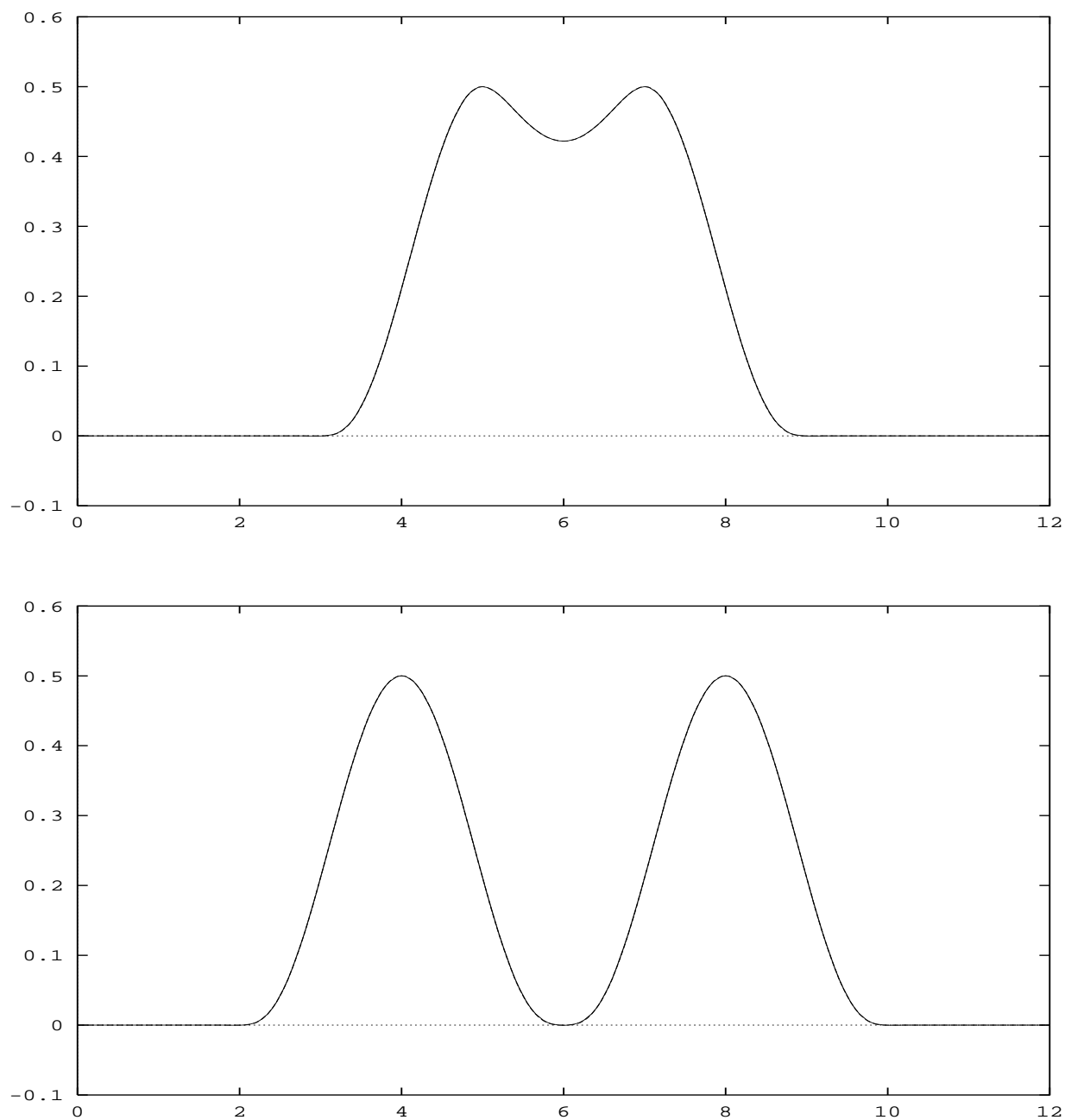


FIG. 5.17 - schéma d'ordre 4 en temps avec condensation de masse  $P_3$ ,  $\alpha = 0.38$ ,  $N = 5$ , (en haut) :  $T=25s$ , (en bas) :  $T=50s$

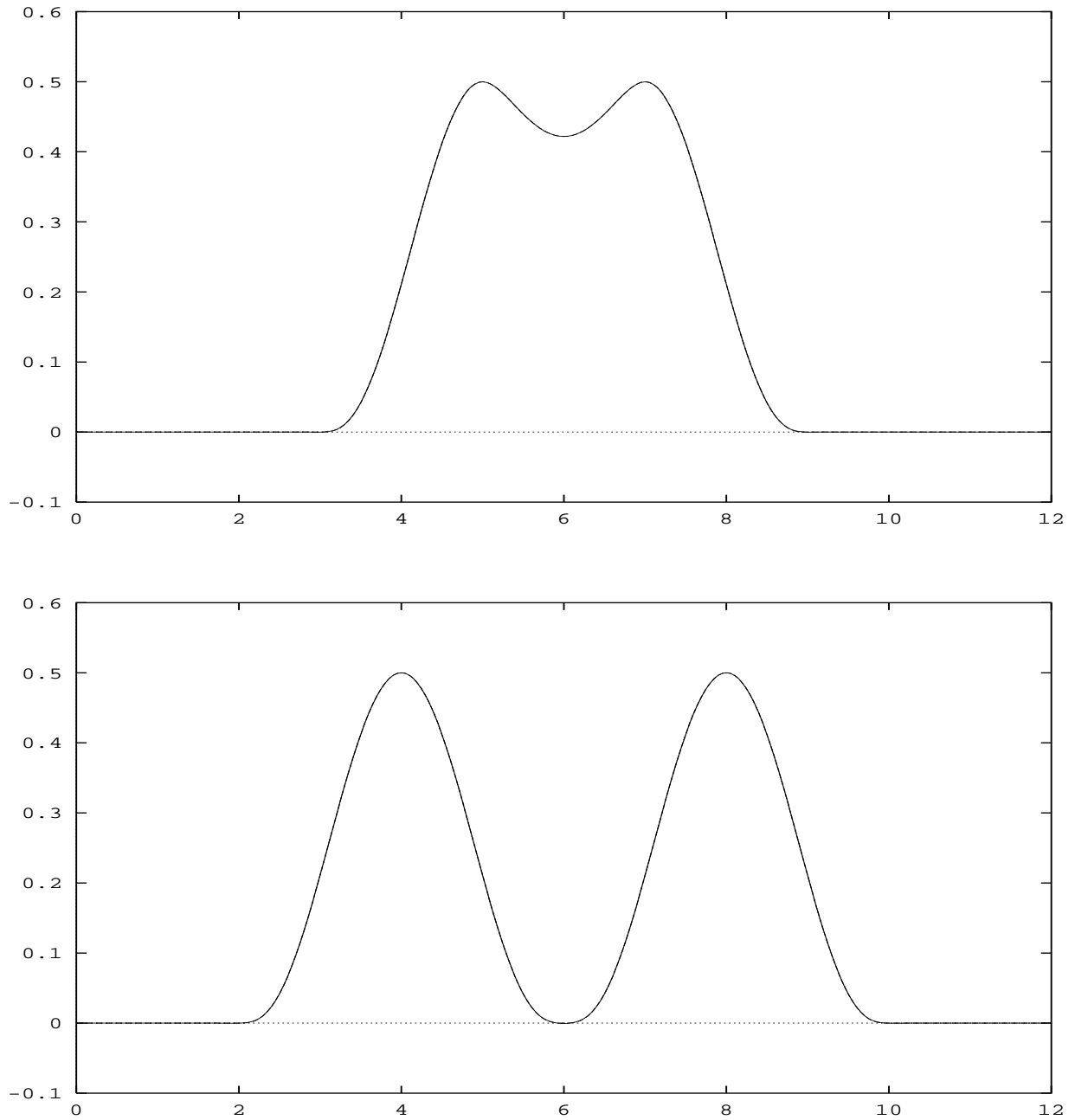


FIG. 5.18 - schéma d'ordre 4 en temps avec condensation de masse  $P_2$ ,  $\alpha = 0.57$ ,  $N = 10$ , (en haut) :  $T=25s$ , (en bas) :  $T=50s$

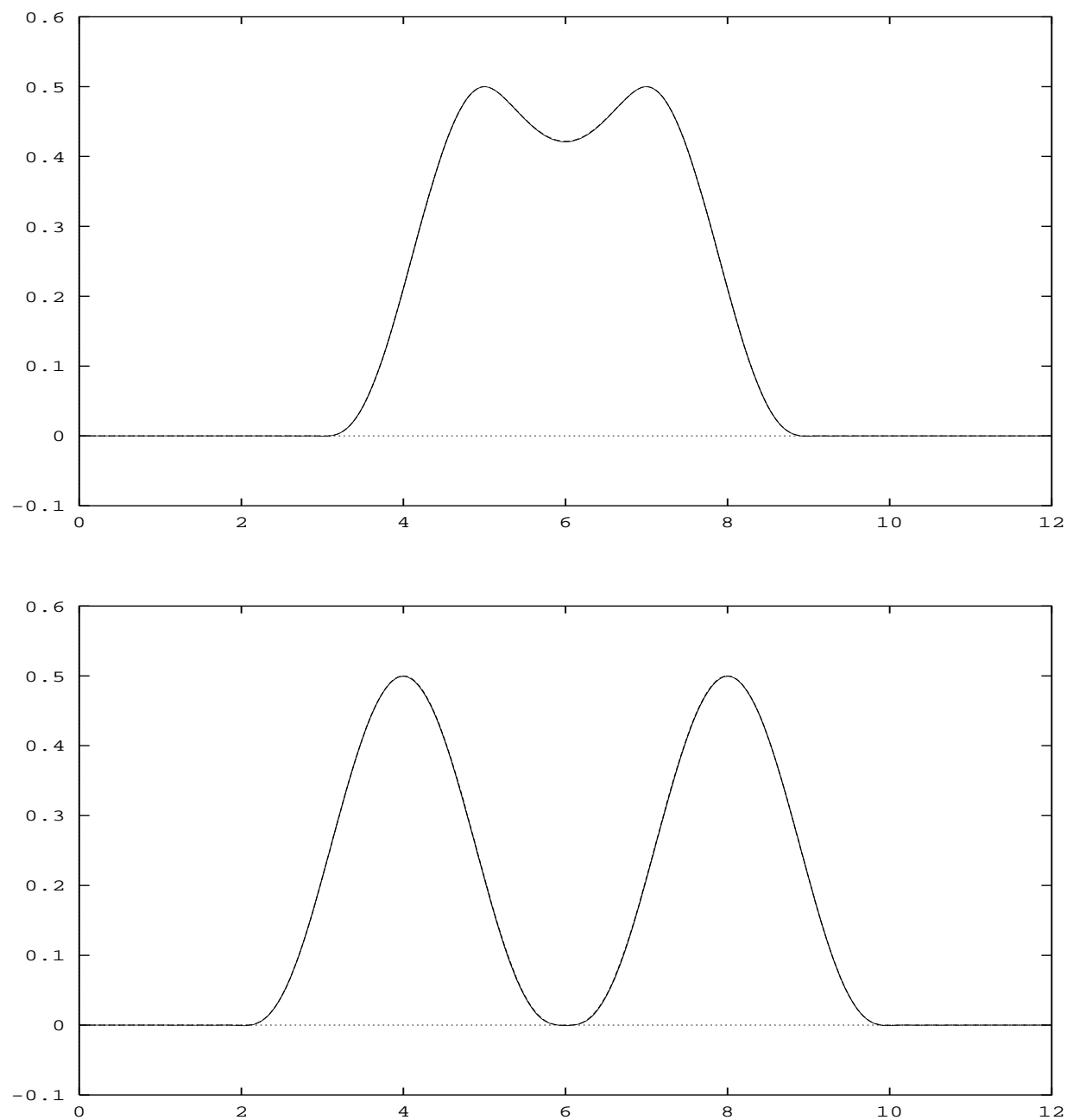


FIG. 5.19 - schéma d'ordre 2 en temps avec condensation de masse  $P_3$ ,  $\alpha = 0.19$ ,  $N = 15$ , (en haut) :  $T=25s$ , (en bas) :  $T=50s$

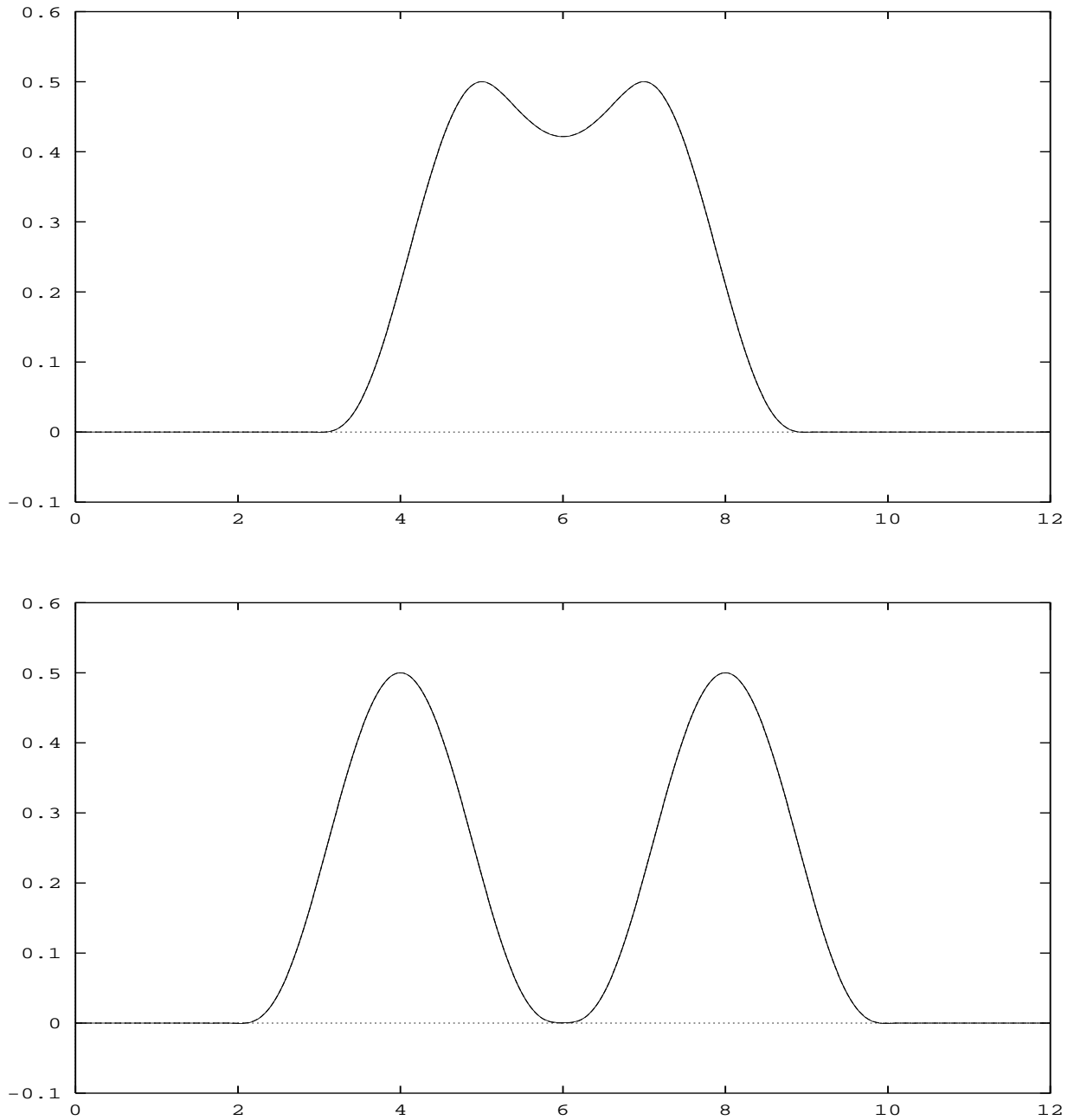


FIG. 5.20 - schéma d'ordre 2 en temps avec condensation de masse  $P_2$ ,  $\alpha = 0.285$ ,  $N = 25$ , (en haut) :  $T=25s$ , (en bas) :  $T=50s$

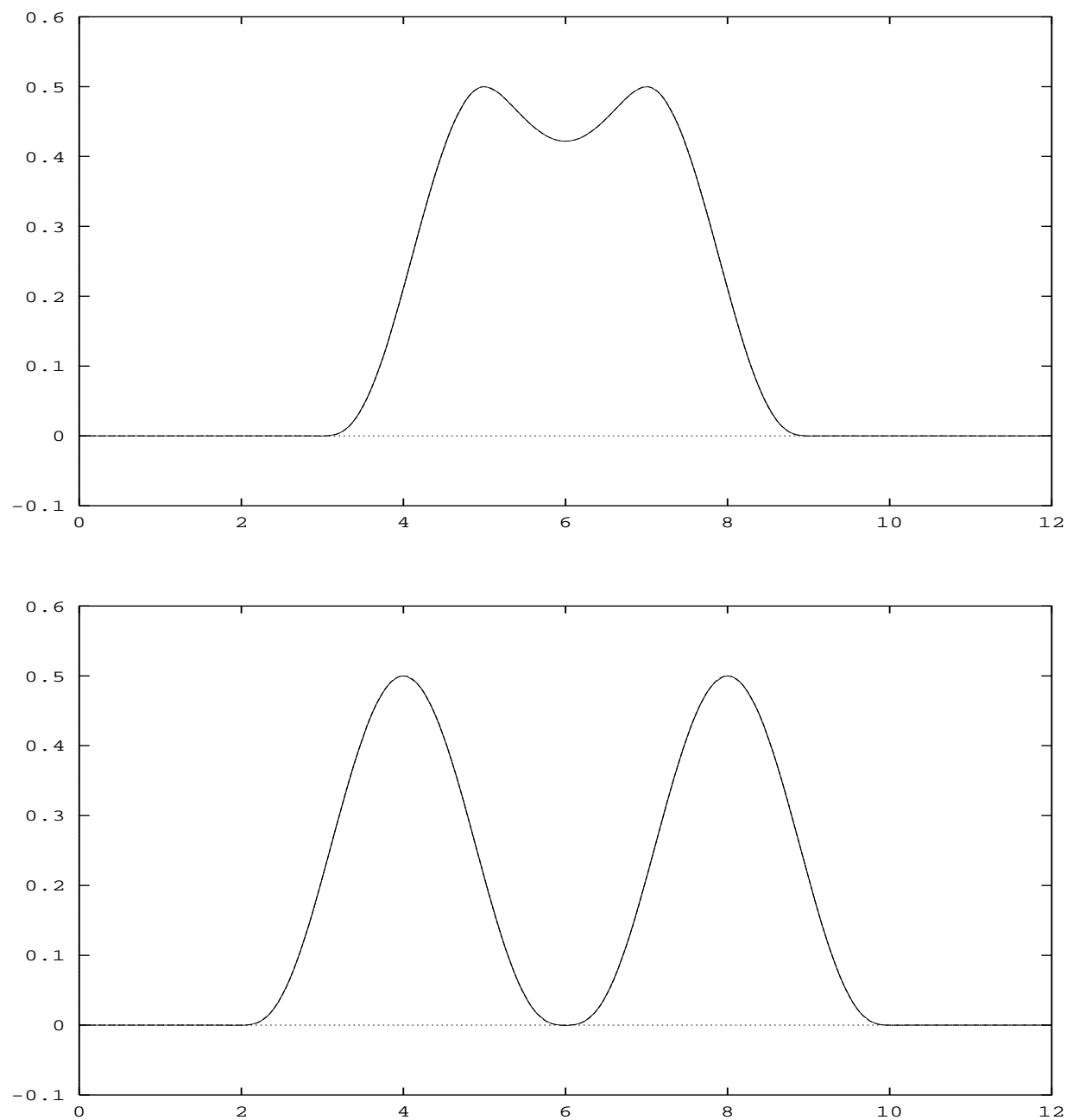


FIG. 5.21 - schéma d'ordre 4 en temps avec condensation de masse  $P_3$  sur maillage non régulier,  $\alpha = 0.38$ ,  $N = 5$ , (en haut) :  $T=25s$ , (en bas) :  $T=50s$

Les résultats numériques suscitent les commentaires suivants :

D'abord les figures 5.3 à 5.7 obtenues respectivement avec le même nombre de points par longueur d'onde montrent la supériorité des schémas  $P_3$ . L'utilisation de schémas avec condensation de masse  $P_3$  en comparaison avec le  $P_3$  classique fournissent en plus d'un gain de temps substantiel, une sensible amélioration de la précision (cf. les figures 5.3 et 5.5), il faut de plus remarquer que la courbe "exacte" pour le schéma  $P_3$  classique n'a pas été faite car avec 25 éléments, la courbe n'est pas bonne et le temps de calcul est très grand, dû au nombre important d'inversions de matrices. D'autre part, l'introduction de méthodes d'ordre supérieur en temps permettent d'obtenir une excellente précision sur la vitesse de l'onde même avec peu d'éléments (cf. figure 5.7). Enfin, la robustesse de la méthode est prouvée par le calcul de la solution sur maillages non-réguliers (cf. figure 5.11). Des commentaires similaires peuvent être faits pour le modèle avec solution initiale. Enfin, la comparaison de  $P_3$  avec  $P_2$  (cf. figures 5.6 à 5.8) laisse à penser, qu'à temps de calcul équivalent (ce qui n'est pas le cas dans les expériences présentées car bien que faites à nombre de points et à pas de temps égaux, elles ne tiennent pas compte du fait que les molécules de  $P_3$  sont plus importantes que celles de  $P_2$ , d'ailleurs, cette différence se creusera lorsqu'on passera en dimension 2 ou 3),  $P_3$  donne une précision supérieure à  $P_2$ . Cela est à vérifier en dimension supérieure.



## Chapitre 6

### Conclusion

Alors que le but initial de notre étude était seulement de supprimer l'inversion de la matrice de masse, l'analyse et les expériences numériques montrent que nous avons construit en outre une méthode robuste d'éléments finis d'ordre élevé de précision supérieure aux méthodes classiques. D'autre part nous avons exhibé un résultat de superconvergence pour des maillages réguliers. Les résultats, tant du point de vue théorique que pratique, incitent naturellement à étendre cette étude à la dimension 2.

## Annexe A

### Démonstration du lemme 1

A l'aide des formules explicites (2.11), on peut obtenir le développement asymptotique de  $\widehat{N}_{1,2,K}$  au voisinage de  $K=0$ , ou  $\widehat{N}_{1,2,K} = h^2 \widehat{N}_{1,2,h}$  et  $K = hk$ . Plus précisément :

$$\widehat{N}_{1,2,K} = \frac{N_{-2}}{K^2} + \frac{N_{-1}}{K} + N_0 + N_1 K + N_2 K^2 + \dots$$

$$N_{-2} = 8 \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad N_0 = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad N_2 = \frac{1}{12} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & 0 \end{bmatrix}$$

$$N_4 = \frac{1}{360} \begin{bmatrix} -1 & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{16} & 0 \end{bmatrix} \quad N_6 = \frac{1}{20160} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{32} \\ -\frac{1}{64} & 0 \end{bmatrix}$$

$$N_{-1} = N_1 = N_3 = N_5 = 0$$

Considérons le produit scalaire définie par :  $((u, v)) = (M_{1,2,h} u, v)$  avec  $M_{1,2,h} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ .

On cherche alors les développements asymptotiques au voisinage de  $K=0$  des valeurs propres et vecteurs propres de  $\widehat{N}_{1,2,K}$ , normalisés à l'aide du produit scalaire qui vient d'être définie. Par construction  $\widehat{N}_{1,2,h}$  est symétrique par rapport à ce produit scalaire et ceci est vrai pour chacun des  $N_j$ . On en déduit que :

$$1 - \text{Ker } N_{-2} \perp \text{Im } N_{-2}, \text{ par rapport au produit scalaire } ((.,.))$$

$2\text{-}Ker(N_{-2} - \lambda Id) \perp Im(N_{-2} - \lambda Id)$ , par rapport au produit scalaire  $((.,.))$

Le calcul des valeurs propres et des vecteurs propres est semblable à ce qui est fait dans la démonstration du lemme 2.

## Annexe B

### Démonstration du lemme 2

A l'aide des formules explicites (cf. (2.16) et (2.17)), on peut obtenir le développement asymptotique de  $\widehat{N}_{1,3,K}$  au voisinage de  $K=0$ , ou  $\widehat{N}_{1,3,K} = h^2 \widehat{N}_{1,3,h}$  et  $K = hk$  (en utilisant le logiciel Maple). Plus précisément :

$$\widehat{N}_{1,3,K} = \frac{N_{-2}}{K^2} + \frac{N_{-1}}{K} + N_0 + N_1 K + N_2 K^2 + \dots$$

$$N_{-2} = \begin{bmatrix} 50 & -25 & -25 \\ -10 & 20 & -10 \\ -10 & -10 & 20 \end{bmatrix} \quad N_{-1} = i\sqrt{5} \begin{bmatrix} 0 & -5 & 5 \\ 2 & 0 & -2 \\ -2 & 2 & 0 \end{bmatrix} \quad N_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$N_1 = i\sqrt{5} \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{15} & 0 & \frac{1}{15} \\ \frac{1}{15} & -\frac{1}{15} & 0 \end{bmatrix} \quad N_2 = \frac{1}{12} \begin{bmatrix} -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{5} & 0 & -\frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & 0 \end{bmatrix}$$

$$N_3 = \frac{i\sqrt{5}}{150} \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{5} & 0 & -\frac{1}{10} \\ -\frac{1}{5} & \frac{1}{10} & 0 \end{bmatrix} \quad N_4 = \frac{1}{120} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{10} & -\frac{1}{10} \\ -\frac{1}{25} & 0 & \frac{1}{75} \\ -\frac{1}{25} & \frac{1}{75} & 0 \end{bmatrix}$$

$$N_5 = \frac{i\sqrt{5}}{12600} \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{5} & 0 & \frac{1}{25} \\ \frac{1}{5} & -\frac{1}{25} & 0 \end{bmatrix} \quad N_6 = \frac{1}{2520} \begin{bmatrix} -\frac{1}{8} & \frac{1}{50} & \frac{1}{50} \\ \frac{1}{125} & 0 & -\frac{1}{1000} \\ \frac{1}{125} & -\frac{1}{1000} & 0 \end{bmatrix}$$

-le produit scalaire définie par  $((u, v)) = (M_{1,3,h}u, v)$ , avec  $M_{1,3,h} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{2} \end{bmatrix}$

$M_{1,3,h}N_{-2}$  est une matrice symétrique.

On cherche alors les développements asymptotiques au voisinage de  $K=0$  des valeurs propres et vecteurs propres de  $\widehat{N}_{1,3,K}$ , normalisés à l'aide du produit scalaire qui vient d'être défini. Par construction  $\widehat{N}_{1,3,K}$  est hermitienne par rapport à ce produit scalaire et ceci est vrai pour chacun des  $N_j$ . On en déduit les propriétés suivantes :

- 1-  $\text{Ker} N_{-2} \perp \text{Im} N_{-2}$ , par rapport au produit scalaire  $((.,.))$
- 2-  $\text{Ker}(N_{-2} - \lambda Id) \perp \text{Im}(N_{-2} - \lambda Id)$ , par rapport au produit scalaire  $((.,.))$
- 3-  $\text{Ker}(N_{-2} - \lambda Id) \perp \text{Ker}(N_{-2} - \lambda' Id)$ , par rapport au produit scalaire  $((.,.))$

Ces propriétés seront utilisées de façon essentielle dans toute la suite.

On notera simplement que  $N_{-2}$  a trois valeurs propres 0, 30 et 60 associés aux vecteurs propres  $X_0$ ,  $Y_0$  et  $Y_0'$ .

### Calcul de $W_K^1$ et de $\lambda_K^1$

Nous cherchons  $W_K^1$  et  $\lambda_K^1$  sous la forme :  $W_K^1 = \sum_{j=0}^{+\infty} X_j K^j$  et  $\lambda_K^1 =$

$$\sum_{j=-2}^{+\infty} \lambda_j K^j.$$

Introduisons ces expressions dans  $\widehat{N}_{1,3,K}W_K^1 = \lambda_K^1 W_K^1$ .

Nous allons obtenir ce qui suit en identifiant terme à terme les deux séries.

• Identification des termes d'ordre -2.

On obtient :  $N_{-2}X_0 = \lambda_{-2}X_0$

Il y a trois cas possibles :

-  $\lambda_{-2} = 0$ , par conséquent  $X_0 \in \text{Ker}N_{-2} \Rightarrow X_0 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  (pour qu'il soit de norme 1)

-  $\lambda_{-2} = 30$ , alors en continuant ce qui suit, on détermine  $\lambda_K^2$  et  $W_K^2$ .

-  $\lambda_{-2} = 60$ , on détermine alors  $\lambda_K^3$  et  $W_K^3$ .

• Identification des termes d'ordre -1.

$$N_{-2}X_1 + N_{-1}X_0 = \lambda_{-1}X_0$$

$$\text{Or } N_{-1}X_0 = 0 \Rightarrow N_{-2}X_1 = \lambda_{-1}X_0$$

$$\text{De plus } X_0 \in \text{Ker}N_{-2} \text{ et } N_{-2}X_1 \in \text{Im}N_{-2} \Rightarrow X_0 \perp N_{-2}X_1$$

$$\text{Par conséquent } ((N_{-2}X_1, X_0)) = \lambda_{-1}((X_0, X_0)) = 0 \Rightarrow \underline{\lambda_{-1} = 0}$$

$$\text{On obtient alors, } N_{-2}X_1 = 0 \Rightarrow X_1 \in \text{Ker}N_{-2} \Rightarrow X_1 // X_0$$

$$\text{De plus } \|W_1(K)\|^2 = 1 \Rightarrow \text{coeff}(\|W_1(K)\|^2, K) = 0 \Rightarrow ((X_0, X_1)) = 0$$

$$\text{Donc } X_1 \perp X_0 \text{ et } X_1 // X_0 \Rightarrow \underline{X_1 = 0}$$

On continue ce procédé tant que les  $X_i$  sont nuls de tel façon à obtenir les termes principaux des développements .

• Identification des termes d'ordre 0.

$$N_{-2}X_2 + N_{-1}X_1 + N_0X_0 = \lambda_0X_0$$

$$\text{Or } N_0X_0 = X_0 \text{ et } N_{-1}X_1 = 0 \Rightarrow N_{-2}X_2 = (\lambda_0 - 1)X_0$$

$$\text{De plus } X_0 \in \text{Ker}N_{-2} \text{ et } N_{-2}X_2 \in \text{Im}N_{-2} \Rightarrow X_0 \perp N_{-2}X_2$$

$$\text{Par conséquent } ((N_{-2}X_2, X_0)) = (\lambda_0 - 1)((X_0, X_0)) = 0 \Rightarrow \underline{\lambda_0 = 1}$$

On obtient alors,  $N_{-2}X_2 = 0 \Rightarrow X_2 \in \text{Ker} N_{-2} \Rightarrow X_2 // X_0$

or  $\text{coeff}(\|W_1(K)\|^2, K^2) = 0 \Rightarrow 2((X_0, X_2)) + \|X_1\|^2 = 0$

Donc  $X_2 \perp X_0$  et  $X_2 // X_0 \Rightarrow \underline{X_2 = 0}$

• Identification des termes d'ordre 1.

$$N_{-2}X_3 + N_{-1}X_2 + N_0X_1 + N_1X_0 = \lambda_0X_1 + \lambda_1X_0$$

Or  $X_2 = X_1 = N_1X_0 = 0 \Rightarrow N_{-2}X_3 = \lambda_1X_0$

De plus  $X_0 \perp N_{-2}X_3 \Rightarrow ((N_{-2}X_3, X_0)) = \lambda_1((X_0, X_0)) = 0 \Rightarrow \underline{\lambda_1 = 0}$

On obtient alors,  $N_{-2}X_3 = 0 \Rightarrow X_3 // X_0$

Or  $\text{coeff}(\|W_1(K)\|^2, K^3) = 0 \Rightarrow ((X_0, X_3)) = 0$

Donc  $X_3 \perp X_0$  et  $X_3 // X_0 \Rightarrow \underline{X_3 = 0}$

• Identification des termes d'ordre 2.

$$N_{-2}X_4 + N_{-1}X_3 + N_0X_2 + N_1X_1 + N_2X_0 = \lambda_0X_2 + \lambda_1X_1 + \lambda_2X_0$$

Or  $X_1 = X_2 = X_3 = N_2X_0 = 0$   
 $\Rightarrow N_{-2}X_4 = \lambda_2X_0$

De plus  $X_0 \perp N_{-2}X_4$

Par conséquent  $((N_{-2}X_4, X_0)) = \lambda_2((X_0, X_0)) = 0 \Rightarrow \underline{\lambda_2 = 0}$

On obtient alors,  $N_{-2}X_4 = 0 \Rightarrow X_4 // X_0$

Or  $\text{coeff}(\|W_1(K)\|^2, K^4) = 0 \Rightarrow ((X_0, X_4)) = 0$

Donc  $X_4 \perp X_0$  et  $X_4 // X_0 \Rightarrow \underline{X_4 = 0}$

• Identification des termes d'ordre 3.

$$N_{-2}X_5 + N_{-1}X_4 + N_0X_3 + N_1X_2 + N_2X_1 + N_3X_0 = \lambda_0X_3 + \lambda_1X_2 + \lambda_2X_1 + \lambda_3X_0$$

Or  $X_1 = X_2 = X_3 = X_4 = 0$  et  $N_3X_0 = \frac{i\sqrt{6}}{1800}Y_0$

$$\Rightarrow N_{-2}X_5 + \frac{i\sqrt{6}}{1800}Y_0 = \lambda_3 X_0$$

$$\text{D'ou } \Rightarrow ((N_{-2}X_5, X_0)) + \frac{i\sqrt{6}}{1800}((Y_0, X_0)) = \lambda_3((X_0, X_0)) = 0 \Rightarrow \underline{\lambda_3 = 0}$$

$$\text{On obtient alors, } N_{-2}X_5 = -\frac{i\sqrt{6}}{1800}Y_0$$

$$\text{De plus } \text{coeff}(\|W_1(K)\|^2, K^5) = 0 \Rightarrow ((X_0, X_5)) = 0, \text{ donc } X_5 \perp X_0$$

$$\Rightarrow X_5 = a_5 Y_0 + b_5 Y'_0$$

$$\text{Par conséquent } X_5 = a_5 Y_0 \quad a_5 = -\frac{i\sqrt{6}}{54000}$$

• Identification des termes d'ordre 4.

$$N_{-2}X_6 + N_{-1}X_5 + N_4X_0 = \lambda_4 X_0$$

$$\text{Or } N_4X_0 = \frac{\sqrt{5}}{4500}Y'_0 \text{ et } N_{-1}Y_0 = -2i\sqrt{30}Y'_0$$

$$\Rightarrow N_{-2}X_6 + Y'_0(-2ia_5\sqrt{30} + \frac{\sqrt{5}}{4500}) = \lambda_4 X_0$$

$$\text{Le produit scalaire avec } X_0 \text{ donne } \underline{\lambda_4 = 0}$$

$$\text{On obtient alors, } N_{-2}X_6 = 0 \Rightarrow X_6 // X_0$$

$$\text{De plus } \text{coeff}(\|W_1(K)\|^2, K^6) = 0 \Rightarrow ((X_0, X_6)) = 0 \Rightarrow X_6 \perp X_0$$

$$\text{Donc } X_6 \perp X_0 \text{ et } X_6 // X_0 \Rightarrow \underline{X_6 = 0}$$

• Identification des termes d'ordre 5.

$$N_{-2}X_7 + N_0X_5 + N_5X_0 = \lambda_0 X_5 + \lambda_5 X_0$$

$$\text{Or } N_5X_0 = -\frac{i\sqrt{6}}{94500}Y_0 \text{ et } N_0Y_0 = -Y_0$$

$$\Rightarrow N_{-2}X_7 - Y_0(a_5 + \frac{i\sqrt{6}}{94500}) = a_5 Y_0 + \lambda_5 X_0$$

$$\text{Le produit scalaire avec } X_0 \text{ donne } \underline{\lambda_5 = 0}$$



On obtient alors,  $N_{-2}X_7 = -\frac{i\sqrt{6}}{37800}Y_0$

De plus  $\text{coeff}(\|W_1(K)\|^2, K^7) = 0 \Rightarrow ((X_0, X_7)) = 0$ , donc  $X_7 \perp X_0$

$$\Rightarrow X_7 = a_7Y_0 + b_7Y_0'$$

Par conséquent  $X_7 = a_7Y_0 \quad a_7 = -\frac{i\sqrt{6}}{1134000}$

• Identification des termes d'ordre 6.

$$N_{-2}X_8 + N_{-1}X_7 + N_1X_5 + N_6X_0 = \lambda_6X_0$$

$$\text{Or } N_6X_0 = -\frac{1}{302400}X_0 - \frac{23\sqrt{6}}{3780000}Y_0', \quad N_{-1}Y_0 = -2i\sqrt{30}Y_0' \text{ et } N_1Y_0 = \frac{i\sqrt{30}}{15}Y_0'$$

$$\Rightarrow N_{-2}X_8 + Y_0'(-2ia_7\sqrt{30} + \frac{i\sqrt{30}}{15}a_5 - \frac{23\sqrt{5}}{3780000}) = X_0(\lambda_6 + \frac{1}{302400})$$

$$\text{Le produit scalaire avec } X_0 \text{ donne } \lambda_6 = -\frac{1}{302400}$$

Par un raisonnement analogue on trouve les développements pour  $W_K^2$ ,  $\lambda_K^2$ ,  $W_K^3$  et  $\lambda_K^3$ .

## Bibliographie

- [1] R.M. ALFORD, K.R. KELLY AND D.M. BOORE *Accuracy of finite difference modeling of the acoustic wave equation*, Geophysics 39 (6) 1974 pp. 834-842.
- [2] A. BAMBERGER, G. CHAVENT AND P. LAILLY *Etude de schémas numériques pour les équations de l'élastodynamique linéaire*, Rapport INRIA RR41 1980.
- [3] P.G. CIARLET *The finite element method for elliptic problems*, Exercise 4.1.7, p. 204, North-Holland eds.
- [4] G. COHEN *A class of schemes, fourth order in space and time, for the 2D wave equation* Proc. of the 6th IMACS Internat. Symp. on Computer Methods for Partial Differential Equations Bethlehem, PA, U.S.A pp. 23-27, June 1987.
- [5] G. COHEN, P. JOLY *Fourth order schemes for the heterogeneous acoustics equation*, Comp. Meth. in Appl. Mech. and Engin., vol. 80, pp. 397-407, North-Holland eds, 1990.
- [6] M.A. DABLAIN *The application of high order differencing for the scalar wave equation*, Geophysics, n°51, vol. 1, 1986", pp. 54-66.
- [7] T.DEVEZE *Contribution à l'analyse, par différences finies, des équations de Maxwell dans le domaine temps*, Thèse, Univ. Paris VI, 1992.
- [8] T.DUPONT  *$L^2$  estimates or Galerkin methods for second-order hyperbolic equations*, SIAM J. Numer.Anal. vol.10, p. 880-889, 1973.
- [9] J-P. HENNART *Topics in finite element discretization of parabolic evolution problems*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 909, pp. 185-199, 1982.
- [10] J-P. HENNART, E. SAINZ, M. VILLEGAS *On the efficient use of the finite element method in static neutron diffusion calculations*, Computational Methods in Nuclear Engineering, vol. 1, p. 3.87, Williamsburg, Virginia, USA, 1979.

- 
- [11] L. NICOLETIS *Simulation numérique de la propagation d'ondes sismiques*, Thèse, Univ. Pierre et Marie Curie, 1981.
  - [12] P.A. RAVIART, J.M THOMAS *Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles*, Masson, 1983.
  - [13] G.R. SHUBIN, J.B. BELL *A modified equation approach to construction fourth order methods for acoustic wave propagation* SIAM J. Sci. Statist. Comput. n°8, vol. 2, (1987) pp. 135-151.
  - [14] A. SEI *Etude de schémas numériques pour des modèles de propagation d'ondes en milieux hétérogènes*, Thèse, Univ. Paris IX, 1991.
  - [15] J. TUOMELA *Analyse de certains problèmes liés à la résolution numérique des équations aux dérivées partielles hyperboliques linéaires*, These, Univ. Paris 7, 1992.



---

Unité de recherche Inria Lorraine, Technopôle de Nancy- Brabois, Campus scientifique,  
615 rue du Jardin Botanique, BP 101, 54600 Villers Lès Nancy  
Unité de recherche Inria Rennes, Irisa, Campus universitaire de Beaulieu, 35042 Rennes Cedex  
Unité de recherche Inria Rhône- Alpes, 46 avenue Félix Viallet, 38031 Grenoble Cedex 1  
Unité de recherche Inria Rocquencourt, Domaine de Voluceau, Rocquencourt, BP 105, 78153 Le Chesnay Cedex  
Unité de recherche Inria Sophia- Antipolis, 2004 route des Lucioles, BP 93, 06902 Sophia- Antipolis Cedex

---

Éditeur  
Inria, Domaine de Voluceau, Rocquencourt, BP 105, 78153 Le Chesnay Cedex (France)  
ISSN 0249- 6399